Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 3**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

9. Gesucht sind Folgen $a_n \to 0$ und b_n, c_n mit $a_n \cdot b_n \to 2$, $\frac{a_n}{c_n} \to \infty$.

10. Bestimme die Grenzwerte von $\frac{5n^3-7n}{6n^3+150}$, $\left(2-\frac{1}{n}\right)^2$ und $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^3$.

11. Bestimme die Grenzwerte von $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ und $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$.

12. Wahr oder falsch?

a) Bei der Folge $\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ ist die Untersuchung auf Konvergenz viel einfacher als bei $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
b) Wenn die Folgen a_n, b_n, c_n konvergent sind, dann auch $a_n + b_n \cdot c_n$.
c) Streng monotone Folgen können nicht beschränkt sein.
d) Es gibt beschränkte Folgen ohne kleinstes und größtes Folgenglied.
e) Es gibt Folgen, bei denen jede reelle Zahl aus [0,1] als Folgenglied vorkommt.
f) Es gibt Folgen, bei denen jede reelle Zahl aus [0,1] als Häufungspunkt vorkommt.

B: Übungsaufgaben

7. a) Es sei $a_n := \begin{cases} 2n+1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 2n+2 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$ und $b_n := \begin{cases} -2n & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -2n+1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Folgen: Die Summe monotoner Folgen muss nicht monoton sein.

b) Beweisen Sie: $a_n \to a$ und $b_n \to b$ mit $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a \leq b$. Gilt diese Aussage auch für „<“ an Stelle von „≤“ ?

8. a) Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn die Folgen a_n und b_n divergent sind, dann auch die Folge $a_n \cdot b_n$.

b) Für reelle Folgen a_n, b_n, c_n, d_n, e_n gelte $e_n = a_n + b_n \cdot c_n + d_n$. Was kann man über das Konvergenzverhalten von e_n aussagen, falls von den anderen Folgen mindestens drei konvergent sind? (Geben Sie alle möglichen Fälle mit Beweis an.)

9. Untersuchen Sie auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzwerte an (mit Beweis, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ und die Resultate aus Aufgabe A 11 dürfen vorausgesetzt werden):

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad b_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad c_n := \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Hinweis zu b_n: Was weiß man über die Folge $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$?

Abgabe der Übungsaufgaben am 10.11.10 nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.