Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 10**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

36. Sei $f(x) := 3x$. Warum kann man die Stetigkeit an einer Stelle x_0 mit der ε–δ–Bedingung ($\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \ldots$) zwar mit $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, nicht aber mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ nachweisen?

37. Zum Nullstellensatz: a) Führe einige Beweisschritte durch für $f : [0,2] \to \mathbb{R},\; f(x) := x^2 - x^3 + 1$.
b) Kann dieser Satz helfen, geschwisterlichen Streit um eine kreisrunde Scheibe Brot, ungleichmäßig belegt mit löchrigem Käse, durch einen einfachen geraden Schnitt durch die belegte Brotscheibe zu schlichten („der hat aber mehr Käse bekommen als ich“)?

38. Skizziere in eine gemeinsame Zeichnung die Fahrt eines Zuges von A nach B und eines Zuges von B nach A jeweils als Funktion, die dem Zeitpunkt t die Entfernung von A zuordnet. (Folgerung?)

39. Wahr oder falsch?
a) Jede stetige Funktion $f : [\,0,1\,] \to [\,0,2\,]$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.
b) Wenn eine reelle Funktion an keiner Stelle stetig ist, kann sie nicht bijektiv sein.
c) Es gibt stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohne Fixpunkt.

B: Übungsaufgaben

28. Diese Aufgabe soll an einem Beispiel Satz 11.6 verdeutlichen:

Sei $f : [\,2,10\,] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1) & \text{für} \quad 2 \le x < 8 \\ 2x - 11 & \text{für} \quad 8 \le x \le 10 \end{cases}$

a) Zeichnen Sie den Graphen von f. b) Gesucht ist die Bildmenge $f([\,2,10\,])$.
c) Gesucht ist die Abbildungsvorschrift für die Umkehrfunktion f^{-1}.
d) Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion.

29. Beweisen oder widerlegen Sie:
a) Jede stetige Funktion $f : [\,0,1\,] \to [\,0,2\,]$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.
b) Jede stetige Funktion $f : [\,0,2\,] \to [\,0,1\,]$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.
c) Jede stetige Funktion $f : [\,0,2\,] \to [\,0,2\,]$ besitzt mindestens eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = 2 - x_0$.
d) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt mindestens eine Nullstelle.

30. Wieviele Stellen gibt es zwischen Berlin und Hamburg, die von einem ICE von Berlin nach Hamburg, Abfahrtszeit Berlin 11:12 Uhr, Ankunft Hamburg 12:52 Uhr, und von einem ICE von Hamburg nach Berlin, Abfahrtszeit Hamburg 11:08 Uhr, Ankunft Berlin 12:47 Uhr, in einem zeitlichen Abstand von exakt einer halben Stunde passiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch unter der Voraussetzung, dass die Deutsche Bahn pünktlich und zuverlässig ist.

Abgabe der Übungsaufgaben am 12.1.11 nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.

Hinweis zum Abgabetermin von Blatt 9: Korrekt ist 5.1.11 und nicht 3.1.11.