Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 1**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

1. Diese Aufgabe bezieht sich auf die Formel $a_{n+1} = G \cdot \frac{\beta}{\alpha+\beta} - (1-\alpha-\beta)^{n+1} \cdot \left(\frac{G \cdot \beta}{\alpha+\beta} - a_0\right)$ aus dem einführenden Beispiel der Vorlesung. Untersuche unter Beachtung der Voraussetzung $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ die Sonderfälle $\alpha = 0 \neq \beta$, $\alpha \neq 0 = \beta$ und $\alpha = \beta$. Was bedeuten $\alpha + \beta = 0$ und $|1-\alpha-\beta| \geq 1$? (Es darf $x^n \to 0$ für $|x| < 1$ benutzt werden.)

2. Ergänze folgenden Lückentext (Definition der Konvergenz):

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl a, wenn es für ______ reelle Zahl ______ ein ________ gibt, so dass __________ < ____ für alle ______________ gilt.

3. a) Gesucht sind die Grenzwerte von $\frac{(-1)^n}{n}$, $4 + \frac{3}{n}$, $\frac{2}{3n}$ und $\frac{5}{n} \cdot n$.

b) Zur Folge $\frac{2}{3n}$: Welches kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$ aus der Definition der Konvergenz gehört zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$?

4. Wahr oder falsch?

a) In der Konvergenzdefinition kann $\forall \varepsilon > 0$ durch $\exists \varepsilon > 0$ ersetzt werden.

b) Wenn zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$, ist a kein Grenzwert der Folge (a_n) .

c) Wenn zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$, ist a ein Grenzwert der Folge (a_n) .

d) Fast alle Hamburger kennen die Definition des Grenzwerts.

B: Übungsaufgaben (Zum Semesterbeginn extra leicht)

1. Führen Sie (1) – (4) aus der Vorlesung aus dem Abschnitt „Ein einführendes Beispiel“ mit den Werten $a_0 = 70$, $b_0 = 30$, $\alpha = 5\%$ und $\beta = 5\%$ durch.

2. a) Gegeben sei die Folge $a_n := \frac{3n+1}{4n+3}$. Gesucht ist das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - \frac{3}{4}| < \frac{1}{160}$ für alle $n \geq n_0$.

b) Beweisen Sie: $a_n := \frac{3n+1}{4n+3}$ konvergiert gegen $\frac{3}{4}$. Hinweis: Nutzen Sie aus, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{16}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 12\right)$ gibt.

3. Sei (a_n) gegeben durch $a_n := \begin{cases} 2 & \text{für } n = 0 \bmod 3 \\ \frac{1}{n} & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Gesucht sind a_{189} und a_{191}. Gibt es ein Folgenglied $a_n = \frac{2}{658}$ (mit Begründung)?

b) Zeigen Sie, dass (a_n) nicht konvergent ist. Hierbei gehe man wie im Beispiel $(-1)^n$ der Vorlesung vor und versuche, einen Widerspruch für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ zu erhalten.

Abgabe der Übungsaufgaben am 27.10. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.