Modul Grundlagen der Mathematik WiSe 09/10

Hinweis: Dieses Manuskript ist eine unvollständige Zusammenfassung von Dingen, die in dem oben genannten Modul zum Teil wesentlich ausführlicher behandelt werden. Es ist daher nur verständlich und von Nutzen für Personen, die gleichzeitig regelmäßig und aktiv die zugehörige Vorlesung besuchen (also nicht nur körperlich anwesend sind), und es wurde auch nur für diesen Hörerkreis geschrieben. Es erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, Fehler sind zwar ärgerlich, aber leider nicht auszuschließen!

0 Zum Einstieg

Ein erster Versuch in drei Teilen, mit den Studierenden Kontakt aufzunehmen.

a) Ein typischer Beweis

Anhand der *Frage*: Welche Arten von Zahlen gibt es? – jeder kennt aus der Schulzeit vermutlich natürliche, ganze und rationale Zahlen – soll gezeigt werden:

Beh.: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Bew.: Wir zeigen: Es gibt keine natürlichen Zahlen m, n mit der Eigenschaft $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
Angenommen, $\sqrt{2}$ ist *doch* eine rationale Zahl, d.h.,

$$\exists\, m, n \in \mathbb{N} : \quad \sqrt{2} = \frac{m}{n} \ .$$

Hierbei steht $\exists$ für *es gibt* und $\in$ für ist Element von. Wir können voraussetzen (Schulwissen), dass n und m nicht beide Vielfache von 2 sind (sonst: Kürzen!).
Aus $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ folgt $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}$, dies ist gleichbedeutend mit

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2n^2 = m^2 \qquad (*)$$

Also ist m^2 eine gerade Zahl. Hieraus folgt, dass auch m selbst gerade sein muss (warum?). Somit gibt es eine natürliche Zahl k mit der Eigenschaft

$$m = 2k.$$

Dies hat wiederum $m^2 = 4k^2$ zur Folge. Setzen wir diesen Ausdruck in $(*)$ ein, erhalten wir $2n^2 = 4k^2$ bzw. (kürze durch 2) $n^2 = 2k^2$. Wie vorher für m folgt analog, dass auch n eine gerade Zahl ist.

Dieses Ergebnis steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass es sich bei m und n *nicht* um zwei gerade Zahlen handeln soll. Unsere Annahme $\sqrt{2}$ *rational* hat zu einem nicht behebbaren Widerspruch geführt, sie war falsch und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Versuchen Sie auf gleiche Weise zu beweisen, dass $\sqrt{3}$ ist keine rationale Zahl ist. Warum gilt diese Behauptung nicht für $\sqrt{4}$?

b) Ein überraschendes Ergebnis

Wir untersuchen die *Frage*: Gibt es mehr ganze als natürliche Zahlen?

Nach Klärung des Begriffes *mehr Zahlen* und Feststellung, ob 0 eine natürliche Zahl ist[1], beweisen wir

Beh.: Die Anzahl der natürlichen Zahlen stimmt mit der Anzahl der ganzen Zahlen überein.

Bew.: Wir ordnen jeder ganzen Zahl folgendermaßen eine natürliche Zahl zu:

$$f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ z & \mapsto & \begin{cases} 2z+1 & \text{falls } z \geq 0 \\ -2z & \text{falls } z < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Beispiel: Der ganzen Zahl 5 wird die natürliche Zahl $f(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$, der ganzen Zahl -2 wird $f(-2) = -2 \cdot (-2) = 4$ zugeordnet.

Für diese Zuordnung gilt:

1.) Jeder ganzen Zahl wird eine natürliche Zahl zugeordnet.

2.) Verschiedenen ganzen Zahlen werden verschiedene natürliche Zahlen zugeordnet:
z_1, z_2 verschiedene nicht negative Zahlen $\Longrightarrow 2z_1 + 1 \neq 2z_2 + 1$
z_1, z_2 verschiedene negative Zahlen $\Longrightarrow -2z_1 \neq -2z_2$
Es bleibt oBdA[2] der Fall
z_1 nicht negativ und z_2 negativ zu untersuchen.
Hier folgt ebenfalls $2z_1 + 1 \neq -2z_2$; denn die eine Zahl ist gerade, die andere ungerade.

Also gibt es *mindestens* so viele natürliche wie ganze Zahlen.

3.) Es gibt auch nicht mehr: Sei n eine gerade natürliche Zahl, so ist $z := -\frac{n}{2}$ die (nach 2.) einzige) ganze Zahl mit $f(z) = n$; ist n ungerade, so ist $z := \frac{n-1}{2}$ die entsprechende ganze Zahl mit $f(z) = n$. Auf diese Weise wird auch jeder natürlichen Zahl eine (jeweils andere) ganze Zahl zugeordnet, es gibt *mindestens* so viele ganze wie natürliche Zahlen.

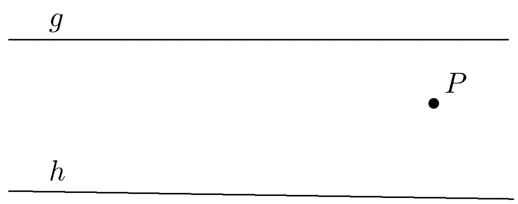
4.) Wenn es einerseits mindestens so viele natürliche wie ganze Zahlen und andererseits mindestens so viele ganze wie natürliche Zahlen gibt, müssen diese Anzahlen übereinstimmen.

Bemerkung: Wir haben soeben die *Gleichmächtigkeit* der Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ nachgewiesen. Später werden wir sogar beweisen, dass auch $\mathbb{Q}$ (die Menge der rationalen Zahlen) gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ ist, nicht aber beispielsweise $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen).

[1] Es gibt gute Gründe, 0 als natürliche Zahl aufzufassen, und genauso gute Gründe, es nicht zu tun! Wir entscheiden uns in dieser Vorlesung für die zweite Variante: 0 ist für uns keine natürliche Zahl. Später werden wir bei Bedarf die um 0 erweiterte Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnen.

[2] oBdA ist die Abkürzung für *ohne Beschränkung der Allgemeinheit*: Wir können den anderen theoretisch noch möglichen Fall $z_1 < 0, z_2 \geq 0$ nämlich völlig analog durch Umbenennung erledigen. Statt oBdA findet man in der Fachliteratur manchmal die Abkürzung oE (ohne Einschränkung).

c) Zufall oder Methode?



Gegeben seien zwei Geraden g und h und ein Punkt P, der nicht auf einer der beiden Geraden liegt (siehe obere Skizze). Gesucht ist die Gerade durch P, die, falls g und h nicht parallel sind, durch den Schnittpunkt von g und h verläuft. Falls g parallel zu h liegt, soll die gesuchte Gerade ebenfalls zu diesen parallel sein. Als Konstruktionshilfsmittel ist nur ein Lineal zum Zeichnen von exakten Geraden zugelassen.

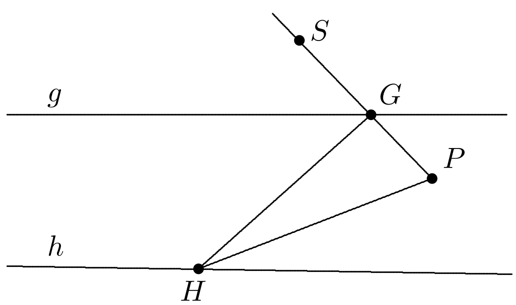
Wir geben ohne Beweis ein „Kochrezept" für die Lösung an; einen exakten Beweis werden wir erst in einigen Semestern kennenlernen:

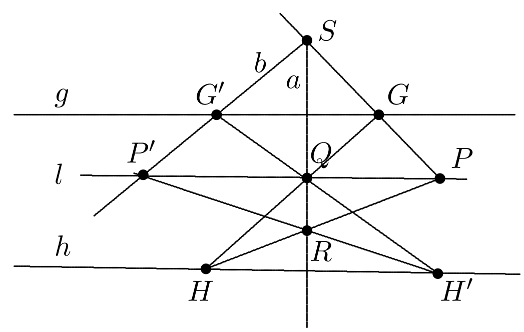
1. Wähle beliebige Punkte G auf g und H auf h so, dass P, G, H ein echtes Dreieck bilden.

2. Zeichne die Gerade PG durch P und G und wähle einen weiteren beliebigen Punkt $S \neq P, G$ auf dieser Geraden.

3. Zeichne die Geraden GH und PH.

Dieser Sachverhalt liegt in der linken Zeichnung vor:





Die nächsten Schritte sind in der rechten Zechnung berücksichtigt:

4. Zeichne zwei weitere beliebige Geraden a und b durch S verschieden von PG so, dass die Schnittpunkte $Q := a \cap GH$, $R := a \cap PH$ und $G' := b \cap g$ ‚vernünftig' eingezeichnet werden können.

5. Verbinde G' mit Q und nenne den Schnittpunkt dieser Geraden mit h H'.

6. Verbinde H' mit R und nenne den Schnittpunkt dieser Geraden mit b P'.

7. Die Verbindungsgerade l von P und P' ist die gesuchte Gerade!

In der Skizze liegt der Punkt Q auf der Geraden l. In den Übungen soll geklärt werden, ob dies notwendigerweise so sein muss, oder ob es sich nur zufällig durch geschickte Wahl der Punkte ergeben hat.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel geht es um Begriffe und Methoden, mit denen Sie zum Teil schon in der Schule konfrontiert wurden. Wir werden uns mit *Mengen, Aussagenlogik, Relationen, Funktionen* und *vollständiger Induktion* beschäftigen. Auf diesen Grundlagen bauen die nachfolgenden Teile auf, sie werden später immer wieder benötigt.

1 Grundbegriffe der naiven Mengenlehre

Die folgende Definition (Festlegung) geht auf den großen deutschen Mathematiker *Georg Cantor*, der von 1845 bis 1918 gelebt hat, zurück:

Def 1.1 Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.

Hierbei bedeutet *wohlbestimmt*, dass es eindeutig feststellbar ist, ob ein Objekt x zu einer Menge M gehört oder nicht, in Zeichen $x \in M$ oder $x \notin M$, in Worten: „x ist (nicht) Element von M“. Mit *wohlunterschieden* ist gemeint, dass jedes Objekt maximal einmal zu einer Menge gehört. Statt von *Objekten* spricht man heute von *Elementen* einer Menge.

Beispiele: 1) Die Menge aller Personen im Hörsaal.

2) Die Menge aller Primzahlen zwischen 10 und 20.

3) Die Zahlenmengen aus dem vorherigen Kapitel $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$.

4) Die Menge aller guten Mathematikstudenten. (?)

5) Die Menge der Buchstaben, aus denen das Wort SEMESTER gebildet wird.

Mengen können angegeben werden durch eine (unvollständige) Auflistung aller Elemente oder durch Angabe von Eigenschaften, stets eingerahmt durch die *Mengenklammern* $\{$ und $\}$. Die Menge aus dem Beispiel 5) ist $\{S, E, M, T, R\}$ oder $\{E, M, R, S, T\}$, da es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt. Weitere Beispiele sind

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\quad \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 - z = 6\} = \{-2, 3\}$, $\quad \{z \in \mathbb{N} \mid z^2 - z = 6\} = \{3\}$.

Def 1.2 Seien A, B beliebige Mengen.

a) A heißt *Teilmenge* von B, geschrieben $A \subseteq B$ oder $A \subset B$ $:\Longleftrightarrow$ Jedes Element von A ist auch Element von B.

b) $A = B$ $:\Longleftrightarrow$ $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

c) A heißt *echte Teilmenge* von B, geschrieben $A \subsetneqq B$ $:\Longleftrightarrow$ Jedes Element von A ist auch Element von B, aber $A \neq B$.

Auf Grund der Definition ist jede Menge Teilmenge von sich selbst. Das Zeichen $\subset$ wird in der Fachliteratur leider nicht einheitlich benutzt (echte/unechte Teilmenge). Die Bedeutung von $A \supset B$ liegt auf der Hand, wenn man diese Aussage von rechts nach links betrachtet: B ist Teilmenge von A oder A ist Obermenge von B. Ebenfalls selbsterklärend ist $A \not\subset B$: A ist keine Teilmenge von B.

Beispiele: $\{1\} \subset \{1, \ldots, 10\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\quad \{0, 1\} \not\subset \mathbb{N}$, da für uns $0 \notin \mathbb{N}$.

Als Nächstes wollen wir einige elementare Rechenoperationen mit Mengen kennenlernen.

Def 1.3 Seien $A, B \subseteq M$.

a) $A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ heißt die *Vereinigung* von A und B.

b) $A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ heißt der *Durchschnitt* von A und B.

c) $A \backslash B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ heißt die *Differenzmenge* von A und B (Reihenfolge von A und B wichtig!).

d) $\overline{A} := \{x \in M \mid x \notin A\}$ heißt das *Komplement* von A (in M).

e) $A \oplus B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ heißt die *symmetrische Differenz* oder *Boolesche Summe* von A und B.

Jedes Element von $A \oplus B$ liegt in genau einer der Mengen A oder B.
Beispiel: $\{1,2,3\} \oplus \{2,3,4\} = \{1,4\}$.

Mengenoperationen können im *Venndiagramm* (Einzelheiten in der Vorlesung) veranschaulicht werden. Enthält eine Menge kein einziges Element, so liegt die *leere Menge* vor, geschrieben $\emptyset$ oder manchmal auch $\{\}$. Es gibt nur *eine* leere Menge; so ist die Menge aller Primzahlen zwischen 24 und 28 gleich der Menge aller fliegenden Elefanten im Geomatikum. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Satz 1.1 Es seien $A, B, C \subseteq M$ beliebige Mengen. Dann gelten

a) $A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetze)

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Assoziativgesetze)

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetze)

d) $A \cap M = A, \quad A \cup M = M, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$

e) $A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = M$

f) $\overline{\overline{A}} = A$

g) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Regeln von de Morgan)

Beweis: a), d), e), f) folgen direkt aus der Definition.

zu b):

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \ \wedge\ x \in (B \cap C) \\ &\iff x \in A \ \wedge\ (x \in B \ \wedge\ x \in C) \\ &\iff (x \in A \ \wedge\ x \in B) \ \wedge\ x \in C \\ &\iff x \in (A \cap B) \ \wedge\ x \in C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

Hier bedeutet $\iff$ *genau dann, wenn.* $\wedge$ ist lediglich eine Abkürzung für das Wort *und*. Wir haben durch korrekte logische Schlüsse gezeigt, dass jedes Element der linken Menge auch in der rechten Menge liegt (beachte im Beweis die Pfeile $\Rightarrow$ von links oben nach rechts unten, damit ist $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ bewiesen), und umgekehrt jedes Element der rechten Menge auch zur linken Menge gehört (wegen der Pfeilrichtung $\Leftarrow$ von unten rechts nach oben links folgt $A \cap (B \cap C) \supseteq (A \cap B) \cap C$). Nach Definition 1.2 b) sind damit die Mengen gleich.

Ersetzt man im Beweis von b) $\cap$ durch $\cup$ und $\wedge$ durch $\vee$ (*oder*), folgt analog das andere Assoziativgesetz.

zu c): Wir zeigen $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Beh. 1: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Bew.: Sei $x \in A \cap (B \cup C) \implies x \in A \wedge x \in (B \cup C)$

1. Fall: $x \in B$, also $x \in A$ und $x \in B$. Damit ist $x \in (A \cap B)$, und erst recht gilt $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2.Fall: $x \notin B$. Dann ist x auf jeden Fall in A und in C, also gilt $x \in (A \cap C)$ und $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Beh. 2: $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Bew.: Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. Fall: $x \in (A \cap B) \implies x \in A \wedge x \in B \implies x \in A \wedge x \in (B \cup C) \implies$ Beh.
2. Fall: $x \in (A \cap C)$ verläuft analog.

Das andere Distributivgesetz wird in den Übungen behandelt.

zu g): Wir zeigen $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, indem wir alle vier möglichen Fälle

(1) $x \in A \ \wedge \ x \in B$ (2) $x \in A \ \wedge \ x \notin B$
(3) $x \notin A \ \wedge \ x \in B$ (4) $x \notin A \ \wedge \ x \notin B$

an Hand einer Tabelle untersuchen. Hierbei bedeutet in einer Spalte der Eintrag 1, dass das Element x zu dieser Menge gehört, und der Eintrag 0, dass x kein Element der betreffenden Menge ist.

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Da die Einträge in den fett gekennzeichneten Spalten übereinstimmen, ist die Behauptung bewiesen. Der Beweis der anderen Regel verläuft analog.

Def 1.4 Seien A, B beliebige Mengen. Dann heißt

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \quad \textit{kartesisches Produkt} \text{ der Mengen } A \text{ und } B$$

Ein *Beispiel* für das kartesische Produkt zweier Mengen ist Ihnen vielleicht (wenn auch sicherlich nicht bewusst) aus langweiligen Schulstunden bekannt: Beim Spiel *Schiffe versenken* wird die vermutete Lage einer jeden Schiffseinheit durch ein Paar (Buchstabe,Zahl) angegeben (kartesisches Produkt!).

Analog definiert man $A \times B \times C := \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$, usw.

Beispiele: 1) $\{1, 2, 3\} \times \{x, y\} = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$.
2) $\{1, 2\}^3 := \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), \ldots, (2, 2, 2)\}$ (insgesamt acht Elemente)
3) $\mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Gitterpunkte der Anschauungsebene.

Besteht ein kartesisches Produkt aus endlichen Mengen, ist die Anzahl der Elemente gerade das Produkt der Anzahl der Elemente der beteiligten Mengen. Im Beispiel 1) besteht das kartesische Produkt $\{1, 2, 3\} \times \{x, y\}$ aus aus $3 \cdot 2 = 6$ Elementen, im Beispiel 2) besteht $\{1, 2\}^3$ aus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Elementen.

Wir wollen ein wenig mit den neu gelernten Begriffen herumspielen:

Satz 1.2 Seien A, B, S, T beliebige Mengen. Dann gelten

(1) $(A \cap B) \times (S \cap T) \;=\; (A \times S) \cap (B \times T)$

(2) $(A \cup B) \times (S \cup T) \;\supseteq\; (A \times S) \cup (B \times T)$

Beweis: zu (1): Sei $(x, y) \in (A \cap B) \times (S \cap T) \iff x \in (A \cap B) \wedge y \in (S \cap T)$

$$\iff (x, y) \in A \times S \wedge (x, y) \in B \times T \iff \text{Beh.}$$

zu (2): Eventuell Übung.

Bitte beachten Sie die unterschiedlichen Zeichen $=$ und $\supseteq$ in den Aussagen (1) und (2) von Satz 1.2. Während in (1) die Gleichheit der Mengen behauptet (und bewiesen) wird, geht es in (2) nur um eine Teilmengenbeziehung. In den Übungen werden Sie (hoffentlich) an einem Beispiel zeigen, dass es Mengen A, B, S, T gibt, für die in (2) die umgekehrte Richtung $\subseteq$ falsch ist.

An dieser Stelle sei noch einmal explizit auf den Unterschied zwischen dem *Tupel* (a, b) und der *Menge* $\{a, b\}$ hingewiesen!

Warum sollen die Elemente einer Menge nicht durchaus selbst Mengen sein?

Def 1.5 Sei M eine beliebige Menge. Die *Potenzmenge* von M, geschrieben $\operatorname{Pot} M$, ist die Menge aller Teilmengen von M.

Beispiele: 1) Sei $M = \{1, 2\} \implies \operatorname{Pot} M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

2) $\operatorname{Pot}(\operatorname{Pot} M) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{M\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, M\}, \{\{1\}, \{2\}\},$
$\{\{1\}, M\}, \{\{2\}, M\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, M\}, \{\emptyset, \{2\}, M\}, \{\{1\}, \{2\}, M\}, \operatorname{Pot} M\}$

3) Sei $A = \{x\}, B = \{a, b\}$. Dann ist $\operatorname{Pot}(A \times B) = \{\emptyset, \{(x, a)\}, \{(x, b)\}, \{(x, a), (x, b)\}\}$.

4) $\operatorname{Pot}\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. *Frage*: Wer kann dieses Beispiel richtig deuten?

Später werden wir beweisen, dass im Falle einer endlichen Menge M mit n Elementen die zugehörige Potenzmenge $\operatorname{Pot} M$ aus 2^n Elementen besteht.

Satz 1.3 Seien $A, B \subseteq M$ beliebige Mengen. Dann gelten

(1) $\operatorname{Pot} A \cap \operatorname{Pot} B \;=\; \operatorname{Pot}(A \cap B)$

(2) $\operatorname{Pot} A \cup \operatorname{Pot} B \;\subseteq\; \operatorname{Pot}(A \cup B)$

Beweis zu (1): Es gilt $x \in (\operatorname{Pot} A \cap \operatorname{Pot} B) \iff x \in \operatorname{Pot} A \wedge x \in \operatorname{Pot} B \iff x \subseteq A \wedge x \subseteq B$
$\iff x \subseteq (A \cap B) \iff x \in \operatorname{Pot}(A \cap B)$

zu (2): Es gilt $x \in (\operatorname{Pot} A \cup \operatorname{Pot} B) \iff x \in \operatorname{Pot} A \vee x \in \operatorname{Pot} B \iff x \subseteq A$ oder $x \subseteq B$
$\implies x \subseteq (A \cup B) \iff x \in \operatorname{Pot}(A \cup B)$

Wie in Satz 1.2 gilt in der Formel (2) anders als in (1) in der Regel nicht das Gleichheitszeichen (im Beweis kommt man an einer Stelle nicht von rechts nach links, wo?), wir belegen dies durch folgendes Beispiel: Sei $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$. Dann gehört die Menge $\{1, 3\}$ zwar zur Potenzmenge von $A \cup B$, aber nicht zu $\operatorname{Pot} A \cup \operatorname{Pot} B$.[3]

[3] Wir haben eine Behauptung durch ein Gegenbeispiel widerlegt. Man hüte sich vor dem Irrtum, eine Behauptung durch ein Beispiel beweisen zu können!

2 Grundbegriffe der Aussagenlogik

Eine *Aussage* ist eine sinnvolle Zusammenstellung von Zeichen (Buchstaben, Zahlen, Sonderzeichen), die entweder *wahr* oder *falsch* ist. (Eindeutig entscheidbar, eine andere Möglichkeit gibt es nicht.)

Beispiele: 1) Wien ist die Hauptstadt von Österreich.

2) Haltet den Dieb! (?)

3) $1 + 3 = 5$

4) Wien ist die Hauptstadt von Österreich oder $1 + 3 = 5$.

5) Wenn $1 + 3 = 5$ ist, dann ist Wien die Hauptstadt von Österreich.

Die letzten zwei der obigen Aussagen sind durch Verknüpfung von Einzelaussagen entstanden. Mit derartigen Verknüpfungen wollen wir uns jetzt befassen. Dabei werden wir uns nur für die Eigenschaft wahr oder falsch, nicht aber für den jeweiligen Inhalt einer Aussage interessieren. Aussagen wollen wir im folgenden mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \ldots$ bezeichnen. Außerdem legen wir fest

„falsch“ wird ausgedrückt durch „0“
„wahr“ wird ausgedrückt durch „1“.

1. Einstellige Verknüpfung: *Negation* einer Aussage A, geschrieben $\overline{A}$, gesprochen „nicht A“ oder „non A“. Die Aussage $\overline{A}$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist.

Beispiel: Aussage A: $1 + 1 = 3$ ist falsch, die Verneinung $\overline{A}$: $1 + 1 \neq 3$ ist wahr.

2. Zweistellige Verknüpfungen $A \wedge B,\ A \vee B,\ A \Rightarrow B,\ A \iff B$.

Die *Konjunktion* wird mit $\wedge$ bezeichnet und entspricht dem umgangssprachlichen „und“. Definiert wird die Konjunktion durch die folgende *Wahrheitstafel*:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Durch $\wedge$ werden zwei beliebige Aussagen A, B zu einer neuen Aussage $A \wedge B$ verknüpft, die genau dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind.

Die Verknüpfung $\vee$ bezeichnet man als *Disjunktion*. Sie entspricht dem umgangssprachlichen „oder“ (im nichtausschließenden Sinne). Die Definition von $\vee$ wird durch die folgende Tabelle gegeben:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Die durch die Verknüpfung $\vee$ aus A, B gebildete Aussage $A \vee B$ ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen A, B falsch sind.

Die Verknüpfung $\Rightarrow$ bildet das umgangssprachliche „wenn, dann“ nach. Sie heißt *Implikation*. Die *Äquivalenz* wird mit $\iff$ bezeichnet und entspricht dem umgangssprachlichen „genau dann, wenn“ oder „dann und nur dann“. Implikation und Äquivalenz werden in der folgenden Tabelle definiert:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Die durch $\Rightarrow$ aus A, B gebildete Aussage $A \Rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist; $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

Beispiel: Die Aussage „*Wenn 1+1=3 ist, folgt 1+1=1*“ ist insgesamt wahr, obwohl beide Teilaussagen $1 + 1 = 3$ und $1 + 1 = 1$ sicherlich falsch sind.

Verknüpfungen können beliebig kombiniert werden, zum *Beispiel*

1) $\overline{\overline{A}} = A$ (doppelte Verneinung)

2) $(A \vee \overline{B}) \Rightarrow (\overline{A} \wedge C)$ mit der zugehörigen Wahrheitstafel:

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee \overline{B}$	$\overline{A} \wedge C$	$(A \vee \overline{B}) \Rightarrow (\overline{A} \wedge C)$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

3) Zu $(A \wedge B) \Rightarrow (A \iff B)$ und $(A \wedge (B \Rightarrow A)) \iff B$ gehören unterschiedliche Wahrheitstafeln.

Stets wahr sind die Aussagen

4) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \iff (A \iff B)$ und 5) $(A \Rightarrow B) \iff (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$.

Die beiden letzten Beispiele haben wichtige beweistechnische Bedeutung. So zeigt man die Äquivalenz von Aussagen A und B oft dadurch, dass man analog zu 4) $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ nachweist. In 5) versteckt sich der Beweis durch Widerspruch. Betrachten wir etwa die Aussagen $A: \ x = \sqrt{2}$ und $B: \ x$ *ist nicht rational*. In der ersten Vorlesungsstunde haben wir $A \Rightarrow B$ behauptet und $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ bewiesen, Beispiel 5) rechtfertigt diese Vorgehensweise.

Zur Vereinfachung der Schreibweise und um Klammern zu sparen, gilt die Regel

$$\overline{} \text{ vor } \wedge \text{ vor } \vee \text{ vor } \Rightarrow \text{ vor } \iff,$$

ferner kann das Konjunktionszeichen $\wedge$ weggelassen werden – so ähnlich wie bei der Regel Punktrechnung vor Strichrechnung, nur ein wenig umfangreicher!

Jede mögliche Wahrheitstafel lässt sich mit einer einzigen Verknüpfung realisieren, dem sogenannten *Sheffer–Strich* $|$. Dabei ist $A|B$ genau dann wahr, wenn A und B nicht beide wahr sind. So gilt zum Beispiel $\overline{A} = A|A$, weitere Beispiele werden vielleicht in den Übungen behandelt.

Wenn man Mengenlehre und Aussagenlogik vergleicht, fallen große Übereinstimmungen auf. Wir halten in einer Tabelle fest:

Menge M	$x \in M$ / $x \notin M$	Komplement	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$	$=$
Aussage A	A ist wahr / falsch	Negation	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Longleftrightarrow$

3 Relationen

Wir interessieren uns für Teilmengen eines kartesischen Produktes $A \times B$.

Def 3.1 Seien A, B beliebige Mengen. Jede Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt *Relation von A nach B*. Ist $A = B$, (also $R \subseteq A \times A$), so heißt R auch *Relation auf A*.

Beispiele: 1) Sei A die Menge aller europäischen Hauptstädte und B die Menge aller Länder. Dann ist $R := \{(a, b) \in A \times B \mid a \text{ ist Hauptstadt von } b\}$ eine Relation; (Rom, Italien) $\in R$, (Wien, Belgien) $\notin R$.

2) Sei A die Menge aller Personen in diesem Hörsaal. Die Menge aller Personenpaare, die nebeneinander sitzen, bilden eine Relation auf A.

3) $A := \mathbb{N}$, $(a, b) \in R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\Longleftrightarrow a \leq b$. Hier gilt $(1, 4) \in R, (3, 2) \notin R$. R ist die bekannte $\leq$ – Relation. Statt $(m, n) \in R$ schreibt man üblicherweise kürzer $m \leq n$.

4) Sei $T := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ und } b \text{ haben beim Teilen durch 3 den gleichen Rest}\}$. Statt $(2, 5) \in T$ schreibt man auch $2 \equiv 5 \mod 3$, gelesen *2 ist kongruent 5 modulo 3*.

5) $\{(a, a), (b, c)\}$ ist eine Relation auf $\{a, b, c, d\}$.

Ab jetzt interessieren wir uns in diesem Kapitel nur noch für Relationen *auf einer Menge*.

Def. 3.2 Sei R eine Relation auf A. Man nennt die Relation R

(1) *reflexiv*, falls $(a, a) \in R$ für jedes $a \in A$ gilt.

(2) *symmetrisch*, falls aus $(a, b) \in R$ stets $(b, a) \in R$ folgt.

(3) *transitiv*, falls aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ stets $(a, c) \in R$ folgt.

(4) *antisymmetrisch*, falls aus $(a, b) \in R$ mit $a \neq b$ stets $(b, a) \notin R$ folgt.

Für die Beispiele 2), 3), 4), 5) – bitte tragen Sie die fehlenden Zeichen in der letzten Zeile selbst ein – gilt:

	(r)	(s)	(t)	(as)
Nachbar	−	+	−	−
$\leq$	+	−	+	+
modulo 3	+	+	+	−
Beispiel 5)				

Uns interessieren folgende *Frage*:

Gibt es Relationen, die alle vier Eigenschaften gleichzeitig erfüllen?

Die Antwort auf die Frage liefert

Satz 3.1 Sei M eine beliebige Menge und $R \subseteq M \times M$. Dann gilt:

$$R \text{ genügt } (r), (s), (t), (as) \iff R \text{ ist die Gleichheitsrelation.}$$

Beweis: Wir haben zwei Beweisrichtungen „$\Rightarrow$“ und „$\Leftarrow$“ zu zeigen.

„$\Rightarrow$“: *Vor.*: R erfülle die vier Bedingungen $(r), (s), (t), (as)$.
Beh.: R ist die Gleichheitsrelation, d.h., $R = \{(m, m) \mid m \in M\} =: G$.
Bew.: 1) Wegen (r) gilt $(m, m) \in R$ für jedes $m \in M$. Damit ist $G \subseteq R$.
2) Angenommen, $\exists (m_1, m_2) \in R$ mit $m_1 \neq m_2$. Wir betrachten die Voraussetzungen (s) und (as).
Aus (s) folgt $(m_2, m_1) \in R$.
Aus (as) folgt $(m_2, m_1) \notin R$.
Beides gleichzeitig ist nicht möglich! Also kann es in R keine Paare (m_1, m_2) mit $m_1 \neq m_2$ geben, damit gilt $R \subseteq G$.
Aus 1) und 2) folgt die Behauptung $R = G$.

„$\Leftarrow$“: *Vor.*: R ist die Gleichheitsrelation, d.h., $R = \{(m, m) \mid m \in M\}$.
Beh.: R erfüllt die vier Bedingungen $(r), (s), (t), (as)$.
Bew.: zu (r): Nach der Definition der Gleichheit gilt $(m, m) \in R$ für jedes Element m aus M.
zu (s): $(m_1, m_2) \in R \implies m_1 = m_2 \implies (m_2, m_1) \in R$.
zu (t): $(m_1, m_2), (m_2, m_3) \in R \implies m_1 = m_2 = m_3 \implies (m_1, m_3) \in R$.
zu (as): Da es keine Paare $(m, n) \in R$ mit $m \neq n$ gibt, folgt die Gültigkeit der Antisymmetrie trivialerweise.

Diese letzte Schlussfolgerung ist für Sie eventuell gewöhnungsbedürftig: Ist eine Voraussetzung nicht erfüllt, ist die Behauptung stets richtig; denn es kann ja nichts Falsches passieren. Dies heißt aber nicht, dass Sie eine Klausur bestehen, wenn Sie ein leeres Blatt abgeben!

Wir wollen nicht untersuchen, ob es Kombinationen aus $(r), (s), (t)$ und (as) gibt, die keine Relation erfüllen kann. Beschränkt man sich allerdings auf die Eigenschaften $(r), (s)$ und (t), so ist jede Kombination hieraus möglich.

Beispiele: Sei $A := \{a, b, c\}$. Die Relation $R_1 := \{(a, a), (b, c), (c, b)\}$ ist symmetrisch, aber nicht reflexiv und nicht transitiv, $R_2 := \{(a, a), (b, b)\}$ ist nicht reflexiv, erfüllt aber (s) und (t). Weitere Fälle werden in den Übungen behandelt.

Jetzt kommen wir zu zwei speziellen Arten von Relationen, die uns im Laufe des Studiums immer wieder begegnen werden.

Def. 3.3 Sei R eine Relation auf A. Man nennt die Relation R

(1) *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

(2) *Ordnungsrelation*, falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Die Gleichheitsrelation ist nach Satz 3.1 die einzige Relation, die gleichzeitig Äquivalenz– und Ordnungsrelation ist. Weitere Beispiele für Äquivalenzrelationen sind Modulo–Relationen. $\leq$ bzw. $\geq$ sind Ordnungsrelationen. Die Kleiner–Relation ist keine Ordnungsrelation, da sie nicht reflexiv ist!

Frage: Ist $R = \{(a,b),(a,c),(b,d),(c,d),(a,d),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$ eine Ordnungs– oder Äquivalenzrelation auf $A := \{a,b,c,d\}$?

Wir wollen die Zahlen von 1 bis 10 in einem Mengendiagramm so darstellen, dass die Relation *gleicher Rest beim Teilen durch 4* deutlich wird. Hierbei stellen wir fest, dass jede Zahl in genau einer echten nichtleeren Teilmenge liegt. Dies liegt nicht an den speziell gewählten Zahlen.

Def 3.4 Sei M eine beliebige Menge, die Mengen K_i seien nichtleere Teilmengen von M. Es gelte:

(i) $K_i \cap K_j = \emptyset$ für alle $K_i \neq K_j$

(ii) $\bigcup K_i = M$ (Vereinigung *aller* K_i)

Dann bilden die Teilmengen K_i eine *Partition* oder *Klasseneinteilung* von M. Die Mengen K_i heißen *Klassen* der Partition.

Beispiele: 1) $M := \{1,2,\dots,9,10\}$ mit $K_0 := \{4,8\}$, $K_1 := \{1,5,9\}$, $K_2 := \{2,6,10\}$, $K_3 := \{3,7\}$ (siehe oben).

2) M die Menge der Personen in diesem Hörsaal, $K_i := \{P \in M \mid P$ hat am i–ten Tag im Jahr Geburtstag $\}$. (Partition?)

3) $M = \mathbb{Z}$, $K_1 := \{z \in \mathbb{Z} \mid z > 0\}$, $K_2 := \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\}$, $K_3 := \{0\}$.

4) $M = \mathbb{N}$, K_1 die Menge der geraden, K_2 die Menge der ungeraden Zahlen.

5) $M = \mathbb{N}$, $K_i := \{i\}$ für $i \in \mathbb{N}$.

6) $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $K_i := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid z_1 + z_2 = i\}$ für $i \in \mathbb{Z}$. *Frage*: Welche Zahlenpaare gehören zur Klasse K_0? Machen Sie sich die Lage der Klassen zueinander mit Hilfe einer Zeichnung klar. (Hinweis: Verbinden Sie alle Zahlenpaare, die zu derselben Klasse gehören.)

Zu jeder gegebenen Partition einer Menge M lässt sich immer eine zugehörige Relation R auf M bilden, indem man definiert

$$R := \{(a,b) \in M \times M \mid \text{ Es gibt ein } K_i \text{ mit } a,b \in K_i\}.$$

Mit anderen Worten: $(a,b) \in R$, falls a und b in derselben Klasse liegen; $(a,b) \notin R$, falls a und b in verschiedenen Klassen liegen. In diesem Sinn gehört die Modulo–4–Relation auf der Menge der Zahlen $\{1,2,\dots,10\}$ zu Beispiel 1).

Satz 3.2 Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Dann gilt: Jeder Partition von M entspricht eine Äquivalenzrelation und jeder Äquivalenzrelation entspricht eine Partition.

Beweis: Wir haben zwei Beweisrichtungen „Partition $\Rightarrow$ Äquivalenzrelation“ und „Partition $\Leftarrow$ Äquivalenzrelation“ zu zeigen.

„$\Rightarrow$“: Sei auf M eine Partition, bestehend aus Teilmengen K_i, gegeben. Wir definieren wie oben $R := \{(a,b) \in M \times M \mid \text{ Es gibt ein } K_i \text{ mit } a,b \in K_i\} \subseteq M \times M$. Der Nachweis, dass R die Eigenschaften $(r),(s),(t)$ einer Äquivalenzrelation erfüllt, ist einfach und wird eventuell als Übung durchgeführt.

„$\Leftarrow$": Sei R eine Äquivalenzrelation, gesucht ist eine zugehörige Partition. Statt $(a,b) \in R$ wollen wir kürzer $a \sim b$ schreiben. Die drei Bedingungen, die R nach Voraussetzung erfüllt, sind

(1) Reflexivität: $a \sim a$ gilt für alle $a \in M$.

(2) Symmetrie: Aus $a \sim b$ folgt immer $b \sim a$.

(3) Transitivität: Aus $a \sim b$, $b \sim c$ folgt immer $a \sim c$.

Zu jedem $a \in M$ definieren wir nun eine Teilmenge K_a von M durch $K_a := \{x \in M \mid a \sim x\}$. Aus (1) folgt dann $a \in K_a \ \forall a \in M$ (das Zeichen $\forall$ bedeutet *für alle*). Wir behaupten:

Beh : $\{K_a \mid a \in M\}$ ist Partition auf M
Bew : Zu zeigen ist (1) $K_a \neq \emptyset \ \ \forall a \in M$.
(2) $K_a \cap K_b = \emptyset$ für $K_a \neq K_b$.
(3) $\bigcup_{a \in M} K_a = M$.

zu (1): Dies ist klar, da nach Definition in jeder Teilmenge K_a wenigstens das Element a liegt.

zu (2): Wir zeigen: Für je zwei Mengen K_a, K_b gilt entweder $K_a \cap K_b = \emptyset$ oder $K_a = K_b$.

Es seien K_a und K_b gegeben mit $K_a \cap K_b \neq \emptyset$ (sonst ist unsere Behauptung bereits erfüllt), sei also $c \in K_a \cap K_b$. Dies bedeutet $a \sim c$ und $b \sim c$. Weil R eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus der vorgegebenen Symmetrie $c \sim b$ und damit aus der verlangten Transitivität $a \sim b$.

Für ein beliebiges $x \in K_a$ gilt dann $a \sim x$ bzw. (Symmetrie) $x \sim a$. Zusammen mit $a \sim b$ (siehe oben) erhalten wir (Transitivität) $x \sim b$ und (Symmetrie) $b \sim x$ und damit $x \in K_b$. Wir haben gezeigt

$K_a \subseteq K_b$; analog kann man $K_b \subseteq K_a$ nachweisen (Übung).

Somit gilt: $K_a = K_b$ (falls $K_a \cap K_b \neq \emptyset$) und (2) ist bewiesen.

zu (3): Klar ist $\bigcup_{a \in M} K_a \subseteq M$. Da für ein beliebiges $x \in M$ stets $x \in K_x$ gilt, ist auch $\bigcup_{a \in M} K_a \supseteq M$ erfüllt und es gilt (3).

Es mag sein, dass Ihnen die Ausführungen über den Zusammenhang zwischen Partitionen (eine durch genaue Regeln festgelegte Einteilung der Elemente einer Menge in Teilmengen) und Äquivalenzrelationen sehr abstrakt und „mathematisch abgehoben" erschienen sind. In diesem Fall merken Sie sich mindestens folgendes:

Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge A bewirkt eine Einteilung der Elemente von A in Teilmengen, die den Regeln einer Partition (die Sie natürlich kennen müssen) genügen. Hierbei gehören genau die Elemente in ein und dieselbe Teilmenge, die zueinander in Relation stehen.

Beispiel: Die Modulo–4–Relation auf $\mathbb{Z}$ unterteilt die Menge der ganzen Zahlen in die vier Teilmengen
$\{0, \pm 4, \pm 8, \ldots\} = \{4z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (Rest 0), $\{1, 5, 9, \ldots, -3, -7, \ldots\} = \{1 + 4z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (Rest 1),
$\{2 + 4z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (Rest 2) und $\{3 + 4z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ (Rest 3).

Frage: Welche Äquivalenzrelationen gehören zu den Beispielen 3), 4) und 5) hinter Def. 3.4?

Ein letztes *Beispiel* soll diesen Abschnitt beenden: Sei M die Menge aller Dreiecke in der Anschauungsebene. Dann bildet die Kongruenz von Dreiecken (wann sind Dreiecke kongruent?) eine Äquivalenzrelation.

4 Abbildungen

Abbildungen werden Ihnen aus Ihrer Schulzeit bekannt sein. Was Sie (sehr wahrscheinlich) nicht wissen, dass es sich bei Abbildungen um ganz spezielle Relationen handelt.

Def 4.1 Seien $A, B \neq \emptyset$ beliebige Mengen. Eine Relation f von A nach B heißt *Abbildung* oder *Funktion* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall a \in A \qquad \exists_1 b \in B \;:\; (a,b) \in f$$

Beispiele: 1) $A = \{0,1,2\},\ B = \{x,y\}, \quad f = \{(0,x),(1,y),(2,x)\}$

2) $A = B = \mathbb{N},\ f = \{(n, 2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

In 1) wird den Zahlen 0 und 2 der Buchstabe x und der Zahl 1 der Buchstabe y zugeordnet, in 2) wird jeder natürlichen Zahl n unter der Abbildung f die Zahl $2n+1$ zugeteilt. Allgemein gehört auf Grund der Definition zu jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$, daher können wir statt $(a,b) \in f$ die üblichere Schreibweise $f(a) = b$ verwenden, statt $f \subseteq A \times B$ schreiben wir $f : A \to B$. Das Beispiel 2) sieht dann so aus:

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{cases}$$

Bei der „Pfeilschreibweise“ sehen wir, dass bei jedem Element aus A genau ein Pfeil beginnt. Das heißt aber nicht, dass verschiedene Pfeile nicht dasselbe Ziel haben dürfen (wie in Beispiel 1)), oder dass es Elemente gibt, bei denen überhaupt kein Pfeil ankommt. (*Frage*: Bei welcher Zahl kommt in Beispiel 2) kein Pfeil an?

In der Regel werden wir für Abbildungen die Buchstaben $f, g, h, \alpha, \beta, \ldots$ verwenden. Im Falle $f : A \to B$ heißt A *Definitionsbereich* oder *Urbildmenge* , B wird auch *Bildbereich* genannt. $f(x)$ ist der *Wert* von f an der Stelle x und wird auch als *Bildelement* von $x \in A$ in B bezeichnet.

Man sollte $f(x)$ nie mit der Abbildung f verwechseln, auch wenn häufig (gerade auch in der Schule) etwas nachlässig von der Abbildung $f(x)$ gesprochen wird. Für $S \subseteq A$ ist $f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$ (Bildmenge von S), für $T \subseteq B$ ist $f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}$ (Urbildmenge von T).

Beispiel: 3)

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & n+m \end{cases}$$

Es ist $f^{-1}(\{2,4\}) = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1)\}$ und $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

Eine Abbildung mit Definitionsbereich $A \times A$ und Bildbereich A wird auch *binäre Verknüpfung* genannt.

Frage: Wenn M_1 die Menge der Personen im Hörsaal und M_2 die Menge der durchnummerierten Tage eines Jahres sind, also $M_2 = \{1,2,\ldots,366\}$, was ist dann bei der Abbildung $g : M_1 \to M_2$, bei der jeder Person p ihr Geburtstag zugeordnet wird, mit $g^{-1}(\{1,2,\ldots,31\})$ gemeint?

Satz 4.1 Sei $f : A \to B$ eine beliebige Funktion und seien $A_1, A_2 \subseteq A,\ B_1, B_2 \subseteq B$. Dann gelten:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Beweis: zu a) „$\subseteq$“: Sei $y \in f(A_1 \cup A_2) \implies \exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y$. Da $x \in A_1$ oder $x \in A_2$ gilt, ist auch $f(x) \in f(A_1)$ oder $f(x) \in f(A_2)$, also $f(x) = y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

„$\supseteq$ “: Sei $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, also $y \in f(A_1)$ oder $y \in f(A_2)$. In beiden Fällen folgt $y \in f(A_1 \cup A_2)$, was zu zeigen war.

zu b): Übung! *Frage*: Warum gilt hier nicht die Gleichheit?

zu c): Sei $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \iff f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2$

$\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

zu d): Ersetze in c) $\cup$ durch $\cap$ und $\vee$ durch $\wedge$.

Def 4.2 Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

(1) *injektiv* $:\iff$ $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ für alle $x, y \in A$

(2) *surjektiv* $:\iff$ zu jedem $b \in B$ existiert ein $a \in A$ mit $f(a) = b$

(3) *bijektiv* $:\iff$ f ist injektiv und surjektiv.

Die Bedeutung von injektiv, surjektiv und bijektiv müssen Sie „im Schlaf“ wissen! Als Merkhilfe kann Ihnen dienen, dass bei injektiven Funktionen bei jedem Element von B *höchstens* ein Pfeil, bei surjektiven Funktionen *mindestens* ein Pfeil endet.

Wir untersuchen die bisherigen Beispiele auf Injektivität/Surjektivtät/Bijektivität:

1) $\{(0, x), (1, y), (2, x)\}$ ist nicht injektiv ($f(0) = f(2)$), aber surjektiv.

2) f mit $f(n) = 2n + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv (1 hat kein Urbild).

3) Auf $\mathbb{N}$ ist die binäre Verknüpfung $+$ wegen $1 + 2 = 2 + 1$ nicht injektiv. Da es zu 1 kein Urbild gibt, ist sie auch nicht surjektiv. Wenn wir $+$ auf $\mathbb{N}_0$ betrachten, folgt wegen $n = n + 0$ die Surjektivität.

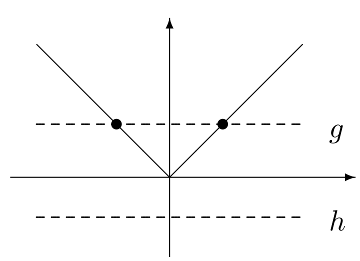
4) Die vor Satz 4.1 betrachtete Personen–Geburtstags–Funktion ist sicherlich nicht surjektiv. (Ist sie injektiv?)

Wenn A und B Mengen mit m bzw. n Elementen sind, kann es für $m > n$ keine injektive und für $m < n$ keine surjektive Abbildung von A nach B geben. Bei manchen Funktionen, speziell bei *reellen Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kann man aus einer Zeichnung auf Injektivität usw. schließen.

Def 4.3 Sei $f : A \to B$. Dann heißt die Menge $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ *Graph* von f.

Wenn bei einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jede* Parallele zur x–Achse den Graphen von f höchstens/mindestens/ genau einmal schneidet, dann ist die Funktion injektiv/surjektiv/bijektiv.

Beispiele: 1)



Die Betragsfunktion f, definiert durch $f(x) := |x|$, ist nicht injektiv (die Gerade g schneidet den Graphen der Funktion *mehr als einmal*) und auch nicht surjektiv (die Gerade h schneidet den Graphen *keinmal*.).

2) $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_i(x) := x^i$ mit $i \in \mathbb{N}$ ist für ungerades i bijektiv. Für i gerade ist f_i wegen $f_i(x) = f_i(-x)$ nicht injektiv, und da $f_i(\mathbb{R})$ keine negativen Zahlen enthält, auch nicht surjektiv.

Es gibt Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die genau eine der Eigenschaften injektiv/surjektiv besitzen, zum *Beispiel* $f(x) := (x-1)x(x+1)$, $g(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für} \quad x < 0 \\ x-1 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$, oder $h(x) := e^x$.

Frage: Welche dieser Funktionen hat welche Eigenschaft?

Kehren wir zum Beispiel $f : \{0,1,2\} \to \{x,y\}$ zurück. *Frage*: Wieviele Abbildungen außer f sind von $\{0,1,2\}$ nach $\{x,y\}$ möglich?

Antwort: Neben f gibt es sieben weitere Abbildungen (siehe Tabelle):

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
0	$\mapsto$	x	x	x	x	y	y	y	y
1	$\mapsto$	x	x	y	y	x	x	y	y
2	$\mapsto$	x	y	x	y	x	y	x	y

Allgemein gibt es für $|A| = m$ und $|B| = n$ genau $|B|^{|A|} = n^m$ verschiedene Abbildungen von A nach B; denn jedem der m Elemente von A (daher m Faktoren) kann jedes der n Elemente von B zugeordnet werden.

Wie wir bereits wissen, gibt es zwischen A und B für $|A| = m \neq n = |B|$ keine bijektiven Abbildungen.

Frage: Wieviele bijektive Abbildungen $A \to B$ sind für $|A| = m = n = |B|$ möglich?

Antwort: Wenn wir die Elemente von A in irgendeiner Weise nummerieren, gibt es für das erste Element $a_1 \in A$ n mögliche Bilder, für das zweite Element a_2 nur noch $n-1$ (wegen der Bijektivität kommt $f(a_1)$ nicht mehr als Bild in Frage), für das dritte Element a_3 nur noch $n-2$ (die bereits festgelegten Bilder $f(a_1)$ und $f(a_2)$ scheiden als Kandidaten aus), usw.

Insgesamt gibt es daher $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ viele bijektive Abbildungen. Mathematiker schreiben diese Produkt kürzer:

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{gesprochen} \quad „n \textit{ Fakultät} “$$

$n!$ ist für jede natürliche Zahl definiert, man setzt ferner $0! := 1$.

Beispiel: $A = B = \{a,b,c\}$. Es gibt $3! = 6$ bijektive Abbildungen:

		1.	2.	3.	4.	5.	6.
a	$\mapsto$	a	a	b	b	c	c
b	$\mapsto$	b	c	a	c	a	b
c	$\mapsto$	c	b	c	a	b	a

Auf ähnliche Weise kann man sich klarmachen, dass für $|A| = m \leq n = |B|$ $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))$ viele injektive Abbildungen von A nach B möglich sind. Dieser Ausdruck macht auch im Fall $m > n$ Sinn, da dann der Faktor 0 im Produkt auftaucht. Für $m \leq n$ kann das Produkt kürzer als $\frac{n!}{(n-m)!}$ geschrieben werden.

Für die Anzahl surjektiver Abbildungen gibt es leider keine einfache Formel. In den Übungen werden wir einige Spezialfälle untersuchen.

Wir fügen dem Personen–Geburtstags–Beispiel eine weitere Menge $M_3 = \{Mo, Di, \ldots, Sa, So\}$ hinzu und definieren $g : M_2 \to M_3$ durch die Zuordnung Jahrestag $\mapsto$ entsprechender Wochentag in 2010, beispielsweise $g(12) = Di$.[4] Jetzt kann jeder Person der Wochentag ihres Geburtstages in 2010 zugeordnet

[4] Da 2010 kein Schaltjahr ist, setzen wir für den 60. Tag - dies ist der 29.02. - $g(60) := g(61) = Mo$.

werden, indem die Funktionen f und g miteinander *verkettet* bzw. *hintereinander ausgeführt* werden:

$$g \circ f : \begin{cases} M_1 & \rightarrow & M_2 & \rightarrow & M_3 \\ p & \mapsto & f(p) & \mapsto & g(f(p)) \end{cases}$$

Es ist also $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. (Beachte: Man wendet die Funktionen „von rechts nach links" an).

Beispiel: Seien $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2 + 1,\ g(x) := x - 2,\ h(x) := 2x$. Gesucht sind die Funktionen $g \circ h$, $h \circ g$, $(f \circ g) \circ h$ und $f \circ (g \circ h)$.

Die Verkettung von Funktionen ist in der Regel nicht kommutativ, es gilt nicht immer $g \circ f = f \circ g$.

Satz 4.2 Die Verkettung von Funktionen ist assoziativ, d.h. es gilt für $f : A \rightarrow B,\ \ g : B \rightarrow C$ und $h : C \rightarrow D$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Beweis: Sei $a \in A$ beliebig. Dann gilt $(h \circ (g \circ f))(a) = h(\,(g \circ f)(a)\,) = h(g(f(a))) = (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a)$.

Für den Rest dieses Kapitels wollen wir uns mit Eigenschaften bijektiver Funktionen beschäftigen.

Noch einmal: Umgangssprachlich ausgedrückt bedeutet bijektiv für eine Abbildung $f : A \rightarrow B$, dass bei jedem $b \in B$ genau ein Pfeil (mit Start in A) ankommt. In diesem Fall können wir die Pfeilrichtung umkehren und erhalten eine Abbildung, die jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ zuordnet. Wir erhalten so eine durch die Abbildungsvorschrift von f eindeutig festgelegte weitere Abbildung $g : B \rightarrow A$.

$$\text{Zu} \quad f : \begin{cases} A & \rightarrow & B \\ a & \mapsto & b \end{cases} \qquad \text{gehört} \qquad g : \begin{cases} B & \rightarrow & A \\ b & \mapsto & a \end{cases}$$

Beispiele: 1) $f : \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ mit $f(a) = 0,\ f(b) = 2,\ f(c) = 1 \ \Rightarrow\ g : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ mit $g(0) = a,\ g(1) = c,\ g(2) = b$

2) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z},\ z \mapsto z + 1$: Hier ist $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z},\ z \mapsto z - 1$.

Bei Bijektionen kann die *eineindeutige* Zuordnung Urbild $\rightarrow$ Bild umgekehrt werden. Daher ist folgende Definition sinnvoll:

Def 4.4 Sei $f : A \rightarrow B$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung $g : B \rightarrow A$ mit $\{g(b)\} := f^{-1}(\{b\})\ \forall b \in B$ die zu f gehörende *inverse Abbildung* oder *Umkehrabbildung*, geschrieben $g = f^{-1}$.

Der Begriff der Umkehrabbildung macht nur bei Bijektionen Sinn. Ist eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ nicht surjektiv, gibt es $b \in B$, bei denen kein Pfeil ankommt; ist f nicht injektiv, gibt es $b \in B$, bei denen mehrere Pfeile ankommen. Man vergleiche diesen Sachverhalt mit der Definition der Abbildung!

Mit f ist f^{-1} ebenfalls bijektiv und besitzt eine Umkehrabbildung, es gilt $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Beispiele: 1) Die identische Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$, ist zu sich selbst invers.

2) Zu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := 2x$ ist g mit $g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ invers.

Frage: Wie lauten die inversen Abbildungen von $x \mapsto x^3$ und $x \mapsto 5x + 2$?

In den Übungen werden wir auf die Unterschiede zwischen $f^{-1}, f^{-1}(T)$ mit $T \subset B$ und $f^{-1}(b)$ eingehen.

Bijektive Abbildungen sind uns bereits in den Vorbemerkungen begegnet, dort wurde die Existenz einer Bijektion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ bewiesen.

Def 4.5 Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, geschrieben $|A| = |B| \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, f : A \to B$ bijektiv.

Man sagt auch, gleichmächtige Mengen besitzen die gleiche *Kardinalzahl*. Bei endlichen Mengen bedeutet gleichmächtig, dass sie die gleiche Anzahl an Elementen besitzen. In diesem Sinn besagt $|M| = n$, dass zu M genau n Elemente gehören.

Beispiel: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, später werden wir sehen $|\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$. *Frage*: Gilt $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$?

Satz 4.3 Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektiv. Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv.

Beweis: Übung (es sind injektiv und surjektiv nachzuweisen).

Folgerung: Mit $f : A \to B$ sind auch $f^{-1} : B \to A$ und die Identitäten $f^{-1} \circ f : A \to A$ und $f \circ f^{-1} : B \to B$ bijektiv.

5 Das Prinzip der vollständigen Induktion

„*Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk*“ soll der große Zahlentheoretiker *Leopold Kronecker* (1823–1891) gesagt haben. Wir wollen die wichtigsten typischen Eigenschaften der natürlichen Zahlen angeben und dann eine Methode kennenlernen, mit deren Hilfe man viele Aussagen, die mit natürliche Zahlen zu tun haben, beweisen kann.

Die folgende Kennzeichnung der natürliche Zahlen stammt von dem italienischen Mathematiker *Giuseppe Peano* (1858 – 1932):

Def 5.1 Die Peanoschen Axiome:

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl

(P2) Jeder natürlichen Zahl n ist genau eine natürliche Zahl n' zugeordnet, die der *Nachfolger* von n genannt wird.

(P3) 1 ist kein Nachfolger.

(P4) Sind natürliche Zahlen n, m verschieden, so auch ihre Nachfolger n', m'.

(P5) Enthält eine Menge M natürlicher Zahlen die Zahl 1 und folgt aus $n \in M$ stets $n' \in M$, so besteht M aus allen natürlichen Zahlen.

Erfüllt eine Menge diese fünf Axiome, handelt es sich um die Menge der natürlichen Zahlen bzw. um eine Menge, deren Elemente sich in allen Belangen genau so verhalten wie die natürlichen Zahlen.

Häufig wird die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt; in diesem Fall gelten (P1) – (P5) analog, wenn man 1 durch 0 ersetzt. In (P2) – (P4) wird die Existenz einer injektiven Abbildung verlangt ($x \mapsto x'$), die wegen (P3) nicht surjektiv ist. Diese Nachfolgerfunktion kann als Addition von 1 interpretiert werden:

$x' = x+1$. (P5) ist das sogenannte *Induktionsprinzip*, mit dem wir uns jetzt ausführlich auseinandersetzen werden.

Mit Hilfe des Induktionsprinzips kann man Aussagen für natürliche Zahlen beweisen. Diesen *Beweis durch vollständige Induktion* werden wir an Hand einiger Beispiele erklären. Zunächst soll die Beweismethode allgemein erläutert werden.

Eine Aussage $A(n)$ soll für natürliche Zahlen n bewiesen werden.

1)	*Induktionsanfang*:	Man beweist die Aussage für einen Startwert n_0: *Zu zeigen*: $A(n_0)$ ist richtig
2)	*Induktionsannahme*:	Die Aussage wird für ein $n \in \mathbb{N}$ als richtig angenommen: *Voraussetzung*: $A(n)$ ist richtig
3)	*Induktionsschluss*:	Man beweist, dass die Aussage dann auch für $n+1$, den Nachfolger von n, richtig ist: *Zu zeigen*: Unter der Voraussetzung $A(n)$ ist $A(n+1)$ richtig.

Damit gilt die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen ab n_0. Die Idee, die dieser Methode zu Grunde liegt, ist denkbar einfach: Nach 1) ist zunächst $A(n_0)$ richtig. Wendet man 3) auf den Fall $n = n_0$ an, hat man $A(n_0+1)$ bewiesen. Jetzt folgt aus 3) für den bewiesenen Fall $n = n_0+1$ die Gültigkeit von $A(n_0+2)$, usw. (Dominoprinzip!).

Bei den folgenden Beispielen werden wir zur Abkürzung das Summenzeichen $\sum$ verwenden:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Beispiele: $\sum\limits_{i=2}^{5} i^2 = 4+9+16+25$, $\sum\limits_{k=0}^{2} c_{2k} = c_0 + c_2 + c_4$, $\sum\limits_{r=1}^{3} 4 = ??$.

Satz 5.1 (Gaußsche Summenformel) *Carl Friedrich Gauß* (1777 – 1855)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: Durch vollständige Induktion

1) Induktionsanfang: Für $n_0 = 1$ ist zu zeigen $\sum\limits_{i=1}^{n_0} i = \frac{n_0 \cdot (n_0+1)}{2}$, also *Beh*: $\sum\limits_{i=1}^{1} i = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$

Bew.: Wegen $\sum\limits_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ ist dies klar.

2) Induktionsannahme: Für ein n gelte $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

3) Induktionsschluss: Wir beweisen für $n+1$: $\sum\limits_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ (n ersetzt durch $n+1$)

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \qquad \text{(Summenformel)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{(nach Induktionsannahme)}$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{(durch einfaches Rechnen)}$$

Analog lassen sich folgende Summenformeln beweisen (zum Teil Übungen):

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Bei den nächsten beiden Aussagen lassen wir die natürlichen Zahlen bei der Zahl 0 beginnen.

Satz 5.2 (Geometrische Summenformel) Sei $q \neq 1$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Beweis: Durch vollständige Induktion

1) Induktionsanfang: Für $n_0 = 0$ ist zu zeigen *Beh:* $\sum\limits_{i=0}^{0} q^i = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$

Bew: $\sum\limits_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1} = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$.

2) Induktionsannahme: Für ein n gelte $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

3) Induktionsschluss: Wir beweisen für $n+1$: $\sum\limits_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + \frac{q^{n+1}(q-1)}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1}$$

Die Behauptung folgt jetzt durch einfache Rechnung.

Satz 5.3 Sei M eine beliebige Menge mit n Elementen. Dann ist $|\operatorname{Pot} M| = 2^n$.

Beweis: Durch vollständige Induktion, hier nur in Kurzform wiedergegeben:

1) $n_0 = 0$: Für $M = \emptyset$ ist $\operatorname{Pot} M = \{\emptyset\}$, also gilt der Induktionsanfang wegen $1 = 2^0$.

2) $n \mapsto n+1$: Sei $M = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\} = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} = M' \cup \{a_{n+1}\}$, nach Induktionsannahme gilt $|\operatorname{Pot} M'| = 2^n$.

Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ ist genau einer der folgenden Fälle möglich:

1. Fall $a_{n+1} \notin A \implies A \subseteq M' \implies$ es gibt genau 2^n verschiedene solcher Mengen (nach Induktionsannahme).

2. Fall $a_{n+1} \in A \implies$ es gibt genau 2^n verschiedene Mengen $A \backslash \{a_{n+1}\} \subseteq M'$ (nach Induktionsannahme) und damit auch 2^n verschiedene solcher Mengen.

Also gilt insgesamt: $|\operatorname{Pot} M| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Satz 5.4 Sei n eine natürliche Zahl, $n > 4$. Dann gilt $2^n > n^2$.

Beweis: Durch vollständige Induktion, Kurzform:

1) $n_0 = 5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

2) $n \mapsto n+1$: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 = n^2 + n \cdot n > n^2 + 3n = n^2 + 2n + n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Satz 5.4 ist zwar auch für $n = 1$ richtig, nicht aber für $n = 2, 3, 4$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem Beweis einer Aussage, die uns später als Hilfsmittel große Dienste leisten wird.

Satz 5.5 (Bernoullische Ungleichung, benannt nach *Jakob Bernoulli* (1654–1705))
Für alle reellen Zahlen $b \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+b)^n \geq 1 + nb$

Beweis: Durch vollständige Induktion, Kurzform:

$n_0 = 1$: $(1+b)^1 = 1 + b \geq 1 + 1 \cdot b$.

$n \to n+1$: Wegen $b \geq -1$ gilt $1 + b \geq 0$. Es folgt

$$(1+b)^{n+1} = (1+b)^n(1+b) \geq (1+nb)(1+b) = 1 + (n+1)b + nb^2 \; .$$

Bemerkung: Für $n \geq 2$ und $b \neq 0$ gilt sogar die strenge Ungleichung $(1+b)^n > 1 + nb$.

Und weil auf dieser Seite noch Platz ist sei noch erwähnt, dass man ebenfalls durch vollständige Induktion beweisen kann, dass jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element besitzt.