

## 6 Geometrie

### 0 Vorbemerkungen

Als Antwort auf die *Frage*: Wovon handelt Geometrie? werden häufig Begriffe wie Punkt, Gerade, Kreis, Winkel, Fläche, Volumen, Länge, Lot fällen, Spiegelungen, Kongruenzen, Strahlensätze, ... genannt.

Wir wollen mit den einfachsten Begriffen beginnen und werden unsere Untersuchungen zunächst auf *Punkte* und *Geraden* beschränken.

*Frage*: Was ist ein Punkt? Was ist eine Gerade?

Bereits Euklid (circa 300 v. Chr.) hat sich mit diesen Fragen beschäftigt und unter anderem festgestellt:

Ein Punkt ist etwas, was keine Teile hat.

Eine Gerade ist eine Linie, die gleich liegt mit den Punkten auf ihr selbst.

Eine Linie hat breitenlose Länge, die Enden einer Linie sind Punkte.

Diese Angaben machen den Sachverhalt kaum klarer! Daher wollen wir nicht länger über diese Fragen nachdenken<sup>41</sup> und legen fest

*Punkte* sind Elemente einer beliebigen Menge  $\mathbb{P} = \{A, B, P, Q, X, \dots\}$ .

*Geraden* sind Elemente einer weiteren, zunächst ebenfalls beliebigen Menge  $\mathbb{G} = \{a, b, g, h, \dots\}$ .

Die Frage, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt oder nicht, wird durch eine Relation auf  $\mathbb{P} \times \mathbb{G}$  festgelegt. Weil wir uns nicht zu weit von unserer gewohnten Anschauung entfernen wollen, gehen wir im Folgenden nicht möglichst allgemein vor (wie Mathematiker es lieben) sondern fassen jede Gerade im Sinne von Euklid als eine Menge von Punkten auf, d.h.,  $\mathbb{G}$  soll ab jetzt eine Teilmenge der Potenzmenge von  $\mathbb{P}$  sein. Damit ist sofort die weitere Frage, wann ein Punkt auf einer Geraden liegt, beantwortet:

**Def 0.1** Sei  $\mathbb{P}$  eine Menge von Punkten und  $\mathbb{G} \subset \text{Pot } \mathbb{P}$  eine Menge von Geraden.

$$A \in \mathbb{P} \text{ liegt auf } g \in \mathbb{G} : \iff A \in g.$$

„Liegt auf“ ist daher nur eine andere Bezeichnungsweise für „ist Element von“, wir werden in diesem Sinn bekannte Schreibweisen wie  $A \in g$  oder  $B \notin h$  benutzen.

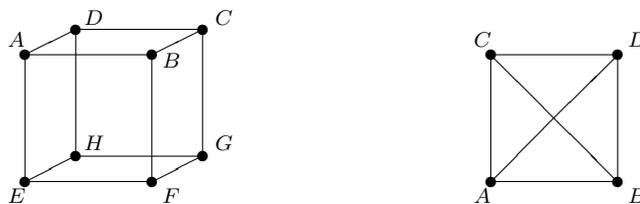
*Beispiele*: 1) *Zahlenstrahl*:  $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{G} = \{\mathbb{R}\}$ . Jeder Punkt (=jede reelle Zahl) liegt auf der Geraden  $\mathbb{R}$  (=Zahlenstrahl).

2) *Anschauungsebene*:  $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{G} = \{g_{m,b}, g_k \mid m, b, k \in \mathbb{R}\}$ . Hier gilt beispielsweise  $(1, 0) \in g_1 \cap g_{1,-1}$  oder  $(5, 3) \notin g_{1,2}$ . Mit der Anschauungsebene haben wir uns bereits ausführlich im zweiten Semester beschäftigt.

3)  $\mathbb{P} := \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ ,  $\mathbb{G} := \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, F\}, \{C, D\}, \{C, G\}, \{D, H\}, \{E, F\}, \{E, H\}, \{F, G\}, \{G, H\}\}$ . Es steht eindeutig fest, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt oder nicht. Wir können die Punkte als Ecken eines Würfels deuten, wobei die Kanten des Würfels den Geraden entsprechen. Man beachte aber, dass unsere Geraden (= Elemente von  $\mathbb{G}$ ) jeweils nur aus zwei (Eck)punkten bestehen!

4)  $\mathbb{P} := \{A, B, C, D\}$ ,  $\mathbb{G}$  bestehe aus allen zweielementigen Teilmengen von  $\mathbb{P}$ . Anschaulich handelt es sich um die Eckpunkte eines Tetraeders.

<sup>41</sup>sonst landet man bei Überlegungen wie: Ein Punkt ist ein Winkel, dem die Schenkel ausgerissen wurden; ein Winkel ist eine geknickte Gerade; eine Gerade ist ein aufgeblasener Kreis; ein Kreis ist ein aufgeblasener Punkt; ... :-)



Links Würfel aus Beispiel 3), rechts Skizze zu Beispiel 4).

Bei endlichen Punkt- und Geradenmengen wie in den letzten beiden Beispielen kann die Inzidenz von Punkten und Geraden (welcher Punkt liegt auf welcher Geraden?) auch durch eine Inzidenztafel angegeben werden.

Frage: Wieviele Möglichkeiten gibt es, in der folgenden Tabelle die fehlenden Punkte so einzutragen, dass die vollständige Inzidenztafel dem obigen Beispiel 3) entspricht?

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$	$g_{12}$
$A$	×				×				×			
$B$	×					×				×		
		×			×						×	
		×				×						×
			×				×		×			
			×					×		×		
				×			×				×	
				×				×				×

Wir werden in der Vorlesung an einem Beispiel „aus dem täglichen Leben“ die unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten (graphisch, durch Mengen, als Inzidenztafel) noch einmal vergleichen.

**Def 0.2** Man nennt

Punkte  $P_1, \dots, P_n$  kollinear oder in kollinearer Lage :  $\iff \exists g \in \mathbb{G} : P_i \in g \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Geraden  $g_1, \dots, g_n$  kopunktal oder in kopunktaler Lage :  $\iff \exists P \in \mathbb{P} : P \in g_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Im Fall der Anschauungsebene sind  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$  nicht kollinear, zwei verschiedene Geraden liegen in ihr genau dann kopunktal, wenn sie nicht parallel sind. Im Würfelbeispiel 3) sind  $A, G$  nicht kollinear, da es keine Gerade in  $\mathbb{G}$  gibt, die  $A$  und  $G$  enthält. Im Beispiel 4) liegen  $\{A, D\}$  und  $\{B, C\}$  nicht kopunktal, auch wenn sich diese „Geraden“ in unserer Zeichnung zu schneiden scheinen.

### 1 Affine Ebenen: Definition und einfache Beispiele

Eines der Ziele dieser Vorlesung ist es, die uns bereits bekannte Anschauungsebene durch möglichst wenige charakterisierende Eigenschaften (Axiome) eindeutig festzulegen; nach dem Motto: Wenn ein Gebilde aus Punkten und Geraden diese und jene Eigenschaft erfüllt, dann muss es sich um die Anschauungsebene handeln.

Wie in der Anschauungsebene wollen wir daher ab jetzt verschiedene Geraden genau dann parallel nennen, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, ferner soll stets jede Gerade zu sich selbst parallel sein.<sup>42</sup> Diese Terminologie bedeutet beispielsweise für den Würfel aus dem vorherigen Abschnitt im Gegensatz zu unserer Anschauung  $\{A, G\} \parallel \{C, E\}$ . Parallelität kommt auch in der nächsten grundlegenden Definition vor:

**Def 1.1** Sei  $\mathbb{P}$  eine Menge von Punkten und  $\mathbb{G} \subset \text{Pot } \mathbb{P}$  eine Menge von Geraden.  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  heißt *affine Ebene* :  $\iff$

- (AE 1)  $\forall P, Q \in \mathbb{P}, P \neq Q, \exists_1 g \in \mathbb{G} : P, Q \in g.$   
(Zwei verschiedene Punkte legen genau eine Gerade fest)
- (AE 2)  $\forall P \in \mathbb{P} \forall g \in \mathbb{G} \exists_1 h \in \mathbb{G} : P \in h \text{ und } g \parallel h.$   
(Sogenanntes Euklidisches Parallelenaxiom)
- (AE 3)  $\mathbb{P}$  enthält mindestens drei nichtkollineare Punkte.

*Beispiele:* 1) Der Zahlenstrahl ist keine affine Ebene; denn Axiom (AE 3) ist nicht erfüllt: Es gibt für alle Punkte eine gemeinsame Gerade.

2) Die Anschauungsebene ist eine affine Ebene. Obwohl dies anschaulich klar ist, werden wir es weiter unten beweisen.

3) Der Würfel mit den 8 Ecken als Punktmenge und den 12 Kanten (Eckenpaare) als Geradenmenge ist keine affine Ebene (warum nicht?)

4) Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  mit  $\mathbb{P} := \{A, B, C, D\}$  und  $\mathbb{G}$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $\mathbb{P}$  (Tetraeder).  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  ist eine affine Ebene, was man durch Überprüfung der drei Axiome beweist.

5) *Frage:* Bildet der Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$  eine affine Ebene?

Bevor wir 2) beweisen, zeigen wir noch

**Satz 1.1** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine affine Ebene. Dann ist  $\parallel$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{G}$ .

**Beweis:** Wir überprüfen reflexiv, symmetrisch, transitiv:

(r): Für alle Geraden  $g$  gilt  $g = g$ , also auch  $g \parallel g$ .

(s):  $g \parallel h \Rightarrow g = h \text{ oder } g \cap h = \emptyset \Rightarrow h = g \text{ oder } h \cap g = \emptyset \Rightarrow h \parallel g.$

(t): Sei  $g \parallel h, h \parallel l$ . Wäre  $g \not\parallel l \Rightarrow \exists S \in g \cap l$  mit  $g \neq l \Rightarrow$  durch  $S$  gibt es verschiedene parallele Geraden zu  $h$ , ein Widerspruch zu (AE 2).

**Satz 1.2** Die Anschauungsebene ist eine affine Ebene.

**Beweis:** Wir überprüfen die Axiome (AE 1) –(AE 3):

(AE 1): Seien  $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{P} = \mathbb{R}^2$  verschiedene Punkte.

1. Fall  $p_1 = q_1 =: k$ : Wegen  $P, Q \in g_k$  existiert eine Verbindungsgerade. Sie ist auch *eindeutig* bestimmt: Für  $l \neq k$  gilt  $P \notin g_l$ . Es kann auch keine gemeinsame Gerade vom Typ  $g_{m,b}$  geben, denn  $P, Q \in g_{m,b} \Rightarrow p_2 = mp_1 + b = mq_1 + b = q_2$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung  $P \neq Q$ .

<sup>42</sup>Wir erinnern uns an die Def IV.10.2: Geraden  $g$  und  $h$  der Anschauungsebene heißen parallel, geschrieben  $g \parallel h$ , :  $\iff g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$ .

2. Fall  $p_1 \neq q_1$ : Es kann keine Gerade vom Typ  $g_k$  geben, auf der beide Punkte liegen. Wir untersuchen, für welche  $m, b$  wir  $P, Q \in g_{m,b}$  erhalten:

$$P, Q \in g_{m,b} \iff \begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ q_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Wir erinnern uns an das Lösbarkeitskriterium aus der linearen Algebra (Satz IV.12.4):

Für  $A \in M(m \times n)$  ist  $Ax = b$  eindeutig lösbar  $\iff \text{rg } A = \text{rg}(A, b) = n$

Weil dies in unserem Fall ( $n = 2$ ) erfüllt ist, gibt es genau eine Gerade  $g_{m,b}$  durch die Punkte  $P$  und  $Q$ .

(AE 2): Sei  $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{P}$ . Für  $g = g_k$  ist  $g_{p_1}$  die einzige Gerade durch  $P$  parallel zu  $g_k$ . Für  $g = g_{m,b}$  erhalten wir durch Rechnung  $P \in g_{m,p_2 - mp_1} \parallel g_{m,b}$ .<sup>43</sup>

(AE 3): Wurde schon erledigt (wo?)

Wenn keine Verwechslung möglich ist, werden wir die in affinen Ebenen eindeutig bestimmte Gerade durch verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  kurz  $AB$  schreiben. An Stelle von  $g \cap h = \{X\}$  notieren wir ohne Klammern kürzer  $g \cap h = X$ . Mit  $(A, g)$  sei ab jetzt die gemäß (AE 2) eindeutig bestimmte Gerade durch  $A$  gemeint, die parallel zu  $g$  verläuft.

Wir haben bereits sehr unterschiedliche affine Ebenen kennengelernt. Noch „kleinere“ affine Ebenen als in Beispiel 4) (bestehend aus vier Punkten und sechs Geraden) kann es nicht geben:

In jeder affinen Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  muss es wegen (AE 3) und (AE 1) mindestens drei verschiedene Punkte  $A, B, C$  und drei verschiedene Geraden  $AB, AC, BC$  geben.

*Frage:* Ist  $(\mathbb{P} = \{A, B, C\}, \mathbb{G} = \{AB, AC, BC\})$  eine affine Ebene?

*Antwort:* Nein, denn (AE 2) ist nicht erfüllt – es fehlen die Geraden  $(A, BC), (B, AC), (C, AB)$ .

Diese zuletzt genannten Geraden sind paarweise nicht parallel, denn wegen Satz 1.1 hätte Parallelität die Kollinearität von  $A, B, C$  zur Folge:

$$BC \parallel (A, BC) \parallel (B, AC) \parallel AC \Rightarrow BC \parallel AC \Rightarrow BC = AC$$

Sei  $D := (B, AC) \cap (C, AB)$ ,  $E := (A, BC) \cap (B, AC)$ ,  $F := (A, BC) \cap (C, AB)$ .

*Frage:* Können die Punkte  $D, E, F$  zusammenfallen?

*Antwort:* Warum nicht?

Wie wir in Beispiel 4) gesehen haben, liegt im Fall  $D = E = F$  eine affine Ebene vor; jetzt wissen wir, dass es sich um den kleinstmöglichen Fall handelt, dem sogenannten *Minimalmodell einer affinen Ebene*.

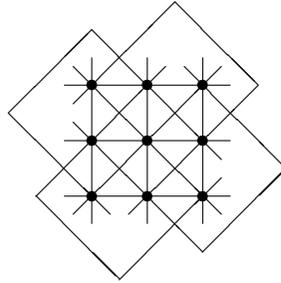
Das Minimalmodell einer affinen Ebene besteht aus 4 Punkten und 6 Geraden. So wie in der Anschauungsebene die reellen Zahlen zur Punktmenge gehören – es ist  $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  – können wir den Punkten des Minimalmodells die Zahlenmenge  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  zuordnen. Auch bei den Geraden geht es so ähnlich zu wie in der Anschauungsebene, wir müssen nur jeweils modulo 2 rechnen.

*Beispiel:* Die Punkte  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  liegen auf der Geraden  $g_{1,1} = \{(x, x +_2 1) \mid x \in \mathbb{Z}_2\}$

Unter Verwendung der Modulo 2 – Rechnung haben wir eine algebraische Darstellung des Minimalmodells gefunden:  $\mathbb{P} = (\mathbb{Z}_2)^2$  und  $\mathbb{G} = \{g_{m,b}, g_k \mid m, b, k \in \mathbb{Z}_2\}$ .

<sup>43</sup>Einzelheiten zur Parallelität von Geraden in der Anschauungsebene sind bereits früher behandelt worden.

Es gibt keine affine Ebene mit genau 5,6,7 oder 8 Punkten. Die zweitkleinste affine Ebene besteht aus 9 Punkten und 12 Geraden:



*Frage:* Kann man die Punkte dieses Modells auch in der Form  $\mathbb{P} = (\mathbb{Z}_3)^2$  schreiben? Wie sieht die dazugehörige Geradenmenge aus?

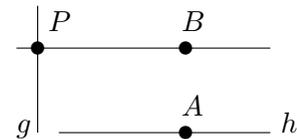
Auf Grund der Axiome (AE 1) und (AE 3) ist schnell klar, dass in jeder affinen Ebene jeder Punkt auf mindestens zwei Geraden liegen muss<sup>44</sup>. Jetzt beweisen wir die „Umkehrung“:

**Satz 1.3** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt  $|g| \geq 2 \quad \forall g \in \mathbb{G}$ .

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass es in keiner affinen Ebene Geraden mit weniger als zwei Punkte geben kann. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen das Gegenteil an.

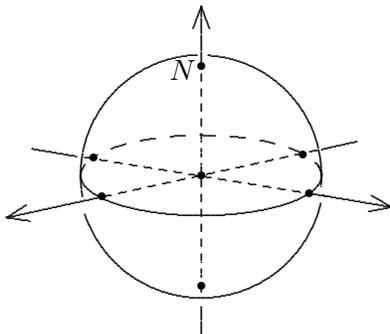
1. Fall: Angenommen, es gibt eine Gerade  $g$  ohne Punkte, also  $g = \emptyset$ . Wegen (AE 3) und (AE 1) existieren Punkte  $A, B, C$  mit  $AB \neq AC$ . Da  $AB \cap g = \emptyset = AC \cap g$ , haben wir verschiedene Geraden  $AB$  und  $AC$  durch  $A$  gefunden, die beide parallel zu  $g$  liegen. Dies ist wegen (AE 2) aber nicht möglich.

2. Fall: Angenommen, es gibt eine Gerade  $g = \{P\}$ . Nach (AE 3) gibt es weitere Punkte  $A, B$  mit  $A \notin BP$ . Sei  $h := (A, BP)$ . Wegen  $P \notin h$  (sonst folgt aus  $AP = h \parallel BP$  die kollineare Lage von  $A, B, P$ ) ist  $g \cap h = \emptyset$ . Erneut haben wir mit  $g$  und  $BP$  verschiedene Geraden durch  $P$  gefunden, die parallel zu  $h$  liegen, Widerspruch zu (AE 2).



## 2 Sphärenmodell und Moultonebene

Weitere Beispiele für affine Ebenen finden wir auf Kugeloberflächen im Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$ . Hierzu betrachten wir die Oberfläche der Einheitskugel  $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , wobei der Punkt  $N = (0, 0, 1)$  ( $N$  wie Nordpol) eine besondere Rolle spielen wird.



Schneiden wir im Anschauungsraum Kugeln mit Ebenen, so ist das Ergebnis stets ein Kreis, sofern die Schnittmenge mindestens zwei Punkte enthält. Sei im Folgenden  $\mathbb{E}$  eine Ebene, die  $\mathcal{S}$  im Nordpol  $N$  und in mindestens einem weiteren Punkt schneidet.

Zur besseren Übersicht sei  $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \setminus \{N\}$ .

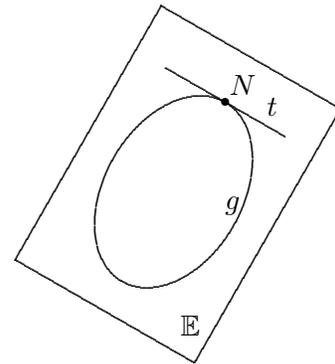
<sup>44</sup>Man kann sogar zeigen, dass jeder Punkt auf mindestens drei Geraden liegt.

**Satz 2.1**  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  mit  $\mathbb{P} = \mathcal{S}'$ ,  $\mathbb{G} = \{\mathcal{S}' \cap \mathbb{E} \mid N \in \mathbb{E} \wedge |\mathcal{S} \cap \mathbb{E}| > 1\}$  ist eine affine Ebene.

*Punkte* dieser affinen Ebene sind alle Punkte auf der Sphäre außer  $N$ , *Geraden* dieser affinen Ebene sind alle Kreise auf der Sphäre durch  $N$ , aber ohne diesen Punkt. In der folgenden Beweisskizze nutzen wir einige einfache Eigenschaften des Anschauungsraumes  $\mathbb{R}^3$  aus, die wir im zweiten Semester kennengelernt haben. Ferner wollen wir den Begriff *Raumgerade* für die „normale“ Gerade durch zwei Punkte des  $\mathbb{R}^3$  verwenden.

**Beweisskizze:** (AE 1): Seien  $A, B$  verschiedene Punkte auf  $\mathcal{S}'$ . Weil  $N$  nicht auf der Raumgeraden von  $A$  und  $B$  liegt, da keine Raumgerade die Kugeloberfläche mehr als zweimal trifft, legen die drei Punkte  $N, A$  und  $B$  genau eine Ebene  $\mathbb{E}$  des  $\mathbb{R}^3$  fest. Nach Definition von  $\mathbb{G}$  ist die gesuchte (affine) Gerade durch  $A$  und  $B$  der Schnitt von  $\mathcal{S}'$  mit dieser Ebene  $\mathbb{E}$ .

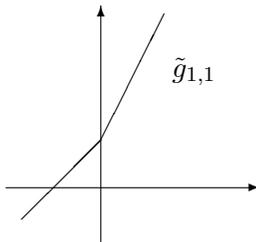
(AE 2): Sei  $P \in \mathbb{P}$ ,  $g \in \mathbb{G}$ . Nach Definition ist  $g \cup \{N\}$  ein Kreis auf  $\mathcal{S}$ . In der eindeutig festgelegten Ebene  $\mathbb{E}$  des Anschauungsraumes, in der  $g \cup \{N\}$  liegt, gibt es genau eine Tangente  $t$  an diesen Kreis durch  $N$ . Die Raumgerade  $t$  hat mit  $\mathcal{S}$  nur den Punkt  $N$  gemeinsam. Weil  $P$  auf  $\mathcal{S}$  liegt, ist  $P \notin t$ , also legen  $P$  und  $t$  im  $\mathbb{R}^3$  genau eine Ebene  $\mathbb{E}'$  fest.  $h := \mathbb{E}' \cap \mathcal{S}'$  ist die durch  $\mathbb{E}'$  auf  $\mathcal{S}'$  bestimmte (affine) Gerade. Wegen  $h \cap g = \emptyset$  ist  $h$  die zu  $g$  gesuchte Parallele durch  $P$ .



(AE 3):  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0) \in \mathbb{P}$  liegen nicht zusammen mit  $N$  in einer Ebene und erfüllen daher das Axiom.

Für das nächste Beispiel kehren wir zur Anschauungsebene zurück. Wir übernehmen die Punkte und alle Geraden vom Typ  $g_k$  und  $g_{m,b}$  mit  $m \leq 0$ . An Stelle der Geraden mit positiver Steigung  $m > 0$  führen wir sogenannte „Knickgeraden“ ein:

Für  $m > 0$  sei  $\tilde{g}_{m,b} := \{(x, m * x + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$  mit  $m * x := \begin{cases} mx & \text{für } x \leq 0 \\ 2mx & \text{für } x > 0 \end{cases}$



Eine Knickgerade: Beim Überqueren der  $y$ -Achse von links nach rechts wird die positive Steigung verdoppelt.

*Übung:* Skizziere die Geraden  $g_1, g_{0,1}, \tilde{g}_{2,0}, \tilde{g}_{1,-1}$ .

Im Folgenden sei  $\mathbb{G}' := \{g_k, g_{m,b} \mid k, m, b \in \mathbb{R}, m \leq 0\} \cup \{\tilde{g}_{m,b} \mid m, b \in \mathbb{R}, m > 0\}$ ; wir haben im Vergleich zur Anschauungsebene die Geraden mit positiver Steigung durch entsprechende Knickgeraden ersetzt.

**Satz 2.2**  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}')$  mit  $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2$  ist eine affine Ebene, die sogenannte *Moultonebene*.

**Beweis:** (AE 1): Der Nachweis der eindeutigen Verbindungsgeraden zweier Punkte unterscheidet sich nur im Fall  $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$  mit  $p_1 < 0 < q_1, p_2 < q_2$  von der Konstruktion der Geraden in der Anschauungsebene (gegebenenfalls knicke man an der  $y$ -Achse).

In diesem Fall muss die gesuchte Gerade vom Typ  $\tilde{g}_{m,b}$  sein mit  $mp_1 + b = p_2$  und  $2mq_1 + b = q_2$ , anders geschrieben  $\begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ 2q_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ . Dieses lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar (warum?), daher ist die gesuchte Gerade eindeutig bestimmt.

Mit der Cramerschen Regel oder durch andersartige Rechnung folgt  $m = \frac{p_2 - q_2}{p_1 - 2q_1}$ ,  $b = \frac{p_1 q_2 - 2p_2 q_1}{p_1 - 2q_1}$ .

(AE 2): Sei  $P = (p_1, p_2)$ ,  $g \in \mathbb{G}'$ , gesucht ist  $(P, g)$ .

1. Fall  $g = g_k \Rightarrow (P, g) = g_{p_1}$
2. Fall  $g = g_{m,b} \Rightarrow (P, g) = g_{m, p_2 - mp_1}$
3. Fall  $g = \tilde{g}_{m,b} \Rightarrow (P, g) = \tilde{g}_{m,c}$  mit  $m * p_1 + c = p_2$ , also  $c = \begin{cases} p_2 - mp_1 & \text{für } p_1 < 0 \\ p_2 - 2mp_1 & \text{für } p_1 \geq 0 \end{cases}$

(AE 3): Die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  liegen nicht kollinear.

Der Beweis von (AE 1) kann übrigens auch ganz anders mit Hilfsmittel aus der Analysis (Stichworte: streng monotone, stetige Funktionen) durchgeführt werden. Ferner kann die Moultonenebene verallgemeinert werden, indem man nicht nur an der  $y$ -Achse, sondern zusätzlich an der  $x$ -Achse knickt.

### 3 Isomorphie und Kollineationen

Den Begriff der Isomorphie haben wir bereits im Zusammenhang mit Gruppoiden und linearen Abbildungen kennengelernt. Für Mathematiker sind isomorphe Gruppen nicht wirklich verschieden. Wir erinnern uns ferner, dass ein Isomorphismus eine strukturerhaltende bijektive Abbildung ist.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Frage untersuchen, wie stark sich Anschauungsebene, Sphärenmodell und Moultonenebene voneinander unterscheiden.

*Frage:* Was bedeutet strukturerhaltend für affine Ebenen?

Die einzige Struktur, die wir bisher bei affinen Ebenen kennengelernt haben, ist die Inzidenz von Punkt und Gerade, d.h., ob Punkte auf einer Geraden liegen oder nicht. Wir wollen daher eine Bijektion zwischen den Punkt Mengen zweier affiner Ebenen als Isomorphismus bezeichnen, wenn bei Anwendung der Abbildung stets kollineare Lage von Punkten erhalten bleibt.

**Def 3.1** Affine Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ ,  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$  heißen *isomorph*, geschrieben  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}) \simeq (\mathbb{P}', \mathbb{G}')$ , wenn eine Bijektion  $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  existiert mit  $\varphi(g) := \{\varphi(P) \mid P \in g\} \in \mathbb{G}'$  für alle  $g \in \mathbb{G}$ .

Eine bijektive Abbildung mit dieser Eigenschaft wird aus naheliegenden Gründen auch *Kollineation* genannt. Wenn zwischen affinen Ebenen eine Kollineation existiert, sind die Ebenen isomorph, zu isomorphen Ebenen gehört immer (mindestens) eine Kollineation. Etwas unpräzise kann man sagen, dass jede Kollineation Geraden bijektiv auf Geraden abbildet. Wie bisher nennt man eine bijektive, strukturerhaltende Abbildung einer affinen Ebene auf sich einen Automorphismus.

Bei den folgenden *Beispielen* für Kollineationen beschränken wir uns auf die Anschauungsebene:

*Beispiele:* 1) Kollineationen haben wir bereits in der linearen Algebra im zweiten Semester kennengelernt, als wir lineare Abbildungen untersucht haben: Jede Spiegelung an einer Geraden durch  $(0, 0)$  und jede Drehung um  $(0, 0)$  ist eine solche Kollineation.

2) Translationen (Verschiebungen) in der Anschauungsebene sind mit Ausnahme der Identität keine lineare Abbildungen (warum nicht?), aber Kollineationen.

3)  $\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, y^3) \end{cases}$  ist bijektiv, aber keine Kollineation; denn  $\alpha(g_{1,0}) \notin \mathbb{G}$ .

Jede Kollineation ist bijektiv und besitzt deshalb eine Umkehrabbildung. Mit Hilfe von Satz 1.3 kann man leicht beweisen, dass mit  $\varphi$  auch  $\varphi^{-1}$  eine Kollineation ist:

**Satz 3.1** Wenn  $\varphi$  eine Kollineation von einer affinen Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  auf eine affine Ebene  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$  ist, ist  $\varphi^{-1}$  eine Kollineation von  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$  auf  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ .

**Beweis:** Zu zeigen ist  $\varphi^{-1}(g') \in \mathbb{G}$  für alle Geraden  $g'$ . Da auf jeder Geraden mindestens zwei Punkte liegen, ist  $g' = A'B'$  mit geeigneten Punkten  $A', B' \in \mathbb{P}'$ . Wegen der Bijektivität von  $\varphi$  gibt es verschiedene Punkte  $A = \varphi^{-1}(A')$  und  $B = \varphi^{-1}(B')$ , die ihrerseits die Gerade  $AB$  in  $\mathbb{G}$  festlegen.

Wegen  $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) = A'B' = g'$  ist  $\varphi^{-1}(g') = \varphi^{-1}(\varphi(AB)) = AB = g$ .

Leicht einzusehen ist folgende, eventuell als Übungsaufgabe zu beweisende Eigenschaft von Kollineationen:

**Satz 3.2** Kollineationen erhalten Parallelität.

Wie verhält es sich nun mit der Anschauungsebene, der Moultonenebene und dem Sphärenmodell in Bezug auf Isomorphie?

**Satz 3.3** Sphärenmodell und Anschauungsebene sind isomorphe affine Ebenen.

**Beweis:** Der Beweis gliedert sich in drei Teile, von denen wir nur die ersten beiden explizit durchführen werden:

- 1) Konstruktion einer Abbildung  $\tau : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{E} := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- 2) Nachweis der Bijektivität von  $\tau$
- 3) Nachweis der Strukturerhaltung von  $\tau$

Zu 1): Für jeden Punkt  $X = (u, v, w) \in \mathcal{S}'$  mit  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$  und  $w \neq 1$  schneidet die Raumgerade  $NX = \{N + \lambda(X - N) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda u, \lambda v, 1 + \lambda(w - 1)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  die Ebene  $\mathbb{E}$  in genau einem Punkt  $P = \tau(X) = (p_1, p_2, 0)$ . Gesucht ist also  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $1 + \lambda(w - 1) = 0 \iff \lambda = \frac{1}{1-w}$

$$\Rightarrow \tau(X) = \tau((u, v, w)) = P = \left( \frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}, 0 \right)$$

Zu 2):  $\tau$  ist injektiv: Seien  $X = (u, v, w), X' = (u', v', w') \in \mathcal{S}'$  Punkte mit  $\tau(X) = \tau(X')$ , also

$$\frac{u}{1-w} = \frac{u'}{1-w'}, \quad \frac{v}{1-w} = \frac{v'}{1-w'}$$

$$\Rightarrow 1 - w'^2 = u'^2 + v'^2 = \left( \frac{u}{1-w} \right)^2 (1-w')^2 + \left( \frac{v}{1-w} \right)^2 (1-w')^2 = \frac{u^2+v^2}{(1-w)^2} (1-w')^2 = \frac{1-w^2}{(1-w)^2} (1-w')^2$$

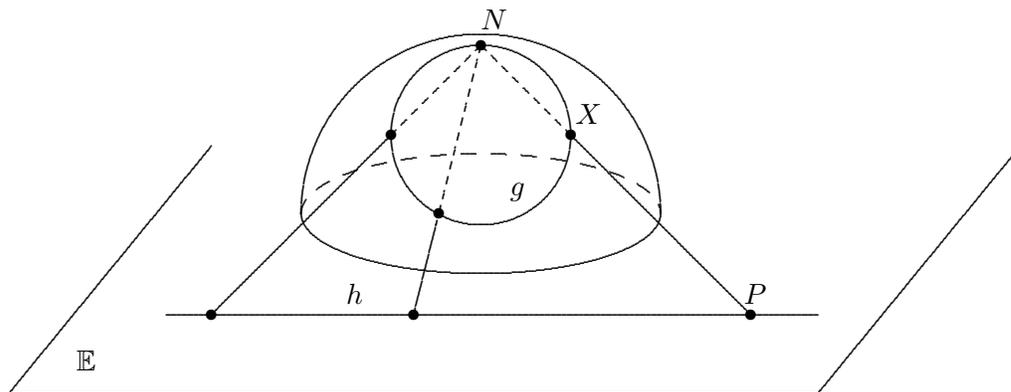
$$\iff (1-w')(1+w') = \frac{(1-w)(1+w)}{(1-w)^2} (1-w')^2 \iff 1+w' = \frac{1+w}{1-w} (1-w')$$

$$\iff (1+w')(1-w) = (1+w)(1-w') \iff w' - w = w - w' \iff X = X'$$

$\tau$  ist surjektiv: Gesucht ist zu  $P = (x, y, 0) \in \mathbb{E}$  ein Punkt  $X \in \mathcal{S}'$  mit  $\tau(X) = P$ , d.h., wir suchen den Schnittpunkt der Raumgeraden  $NP = \{N + \lambda(P - N) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda x, \lambda y, 1 - \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  mit  $\mathcal{S}'$ :

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1, \quad \lambda \neq 0 \iff \lambda^2(x^2 + y^2 + 1) = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$\Rightarrow X = \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$  ist das gesuchte Urbild.



Zu 3): Sei  $\rho : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Bijektion  $(x, y, 0) \mapsto (x, y)$ . Als Verkettung von Bijektionen ist auch  $\alpha := \rho \circ \tau : S' \rightarrow \mathbb{R}^2$  bijektiv. Durch teilweise umfangreiche Rechnung kann man zeigen, dass  $\alpha$  eine Kollineation ist. Wir machen uns dies nur anschaulich klar:

Zu jeder Geraden  $g$  des Sphärenmodells (= Kreis auf  $S$  durch  $N$  ohne  $N$ ) existiert genau eine Ebene  $\mathbb{E}' \subset \mathbb{R}^3$  mit  $g \subset \mathbb{E}'$ .  $\mathbb{E}' \cap \mathbb{E}$  ist eine eindeutig bestimmte Raumgerade  $h$ ,  $\rho(h)$  ist eine Gerade der Anschauungsebene. Insgesamt wird so jede Gerade des Sphärenmodells auf eine Gerade der Anschauungsebene abgebildet.

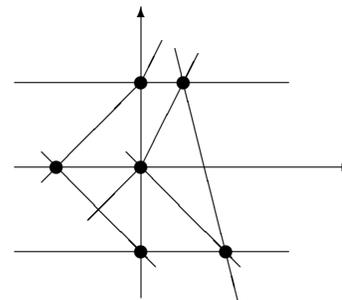
*Frage* (als Übungsaufgabe): Wie sieht das Urbild von  $g_1$  unter  $\alpha$  aus?

Die Abbildung  $\tau : S' \rightarrow \mathbb{E}$  aus Satz 3.3, die auch in anderen Zusammenhängen von Bedeutung ist, heißt *stereographische Projektion*.

**Satz 3.4** Moultonebene und Anschauungsebene sind nicht isomorph.

**Beweisidee:** Wir nutzen Satz 3.2 aus: Parallele Geraden werden unter Kollineationen auf parallele Geraden überführt.

Seien in der Moultonebene die Punkte  $A_1 = (0, 1)$ ,  $A_2 = (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $B_1 = (-1, 0)$ ,  $B_2 = (0, 0)$ ,  $C_1 = (0, -1)$ ,  $C_2 = (1, -1)$  gegeben. Die eindeutig festgelegten Geraden  $a = A_1A_2 = g_{0,1}$ ,  $b = B_1B_2 = g_{0,0}$ ,  $c = C_1C_2 = g_{0,-1}$  sind parallel, ebenso gilt  $A_1B_1 = \tilde{g}_{1,1} \parallel \tilde{g}_{1,0} = A_2B_2$ ,  $B_1C_1 = g_{-1,-1} \parallel g_{-1,0} = B_2C_2$ . Wie aus der Zeichnung zu entnehmen bzw. leicht zu berechnen ist, gilt aber  $A_1C_1 = g_0 \not\parallel g_{-4,3} = A_2C_2$ .



Wären Moulton- und Anschauungsebene isomorph, müsste eine Kollineation  $\varphi$  existieren, die diese Konfiguration unter Erhaltung der vorliegenden Parallelitäten in die Anschauungsebene überführt. Dies ist aber nicht möglich, da in der Anschauungsebene wegen Satz 3.2 aus der spezifischen Lage der beteiligten Geraden stets  $\varphi(A_1)\varphi(C_1) \parallel \varphi(A_2)\varphi(C_2)$  folgt und daher kein Bildpunkt zu  $g_0 \cap g_{-4,3}$  existieren kann.

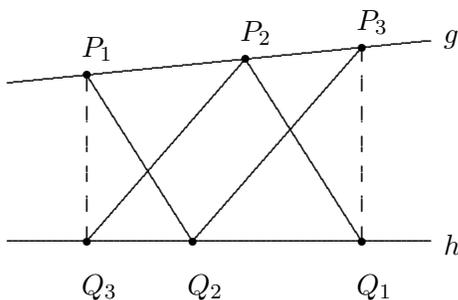
### 4 Schließungssätze

Wir haben im letzten Satz die Nichtisomorphie zweier affiner Ebenen begründet, indem wir aus der Voraussetzung über die parallele Lage gewisser Geraden die notwendige Parallelität weiterer Geraden in der Anschauungsebene gefolgert haben.

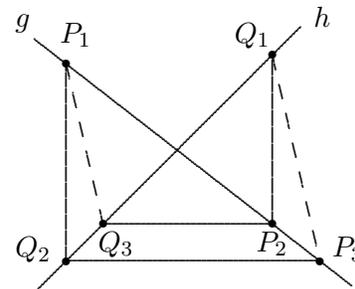
Jetzt wollen wir uns ausführlich mit Aussagen dieser Art beschäftigen. Aus historischen Gründen werden sie als „Sätze“ bezeichnet, obwohl der Name Satz eigentlich nicht angebracht ist, denn sie gelten im Gegensatz zur Anschauungsebene nicht in jeder affinen Ebene. Wir werden sie als Definitionen für beliebige affine Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  formulieren.

**Def 4.1** (Großer Satz von Pappus,  $\approx 320$  n. Chr.)

Seien  $g, h$  verschiedene Geraden, seien  $P_i \in g \setminus h, Q_i \in h \setminus g$  für  $i = 1, 2, 3$  Punkte mit  $P_1Q_2 \parallel P_2Q_1, P_2Q_3 \parallel P_3Q_2$ . Dann folgt  $P_1Q_3 \parallel P_3Q_1$ .



oder



Wir werden den großen Satz von Pappus mit (P) abkürzen. Wenn (P) in einer affinen Ebene gültig ist, spricht man von einer *pappusschen affinen Ebene*.

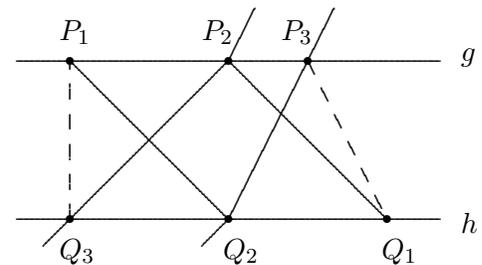
Setzt man in Definition 4.1 zusätzlich die Parallelität der sogenannten *Trägergeraden*  $g$  und  $h$  voraus, liegt der *kleine Satz von Pappus* (p) vor. Wir notieren als einfache Erkenntnis

**Satz 4.1** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt  $(P) \Rightarrow (p)$ .

**Beweis:** (p) ist ein Spezialfall von (P).

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene gelten (P) und (p).

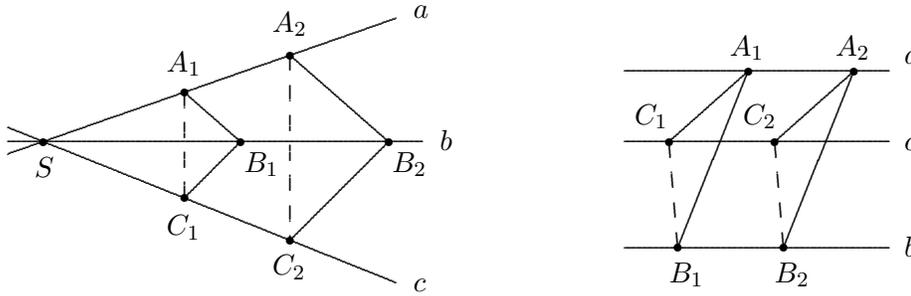
2) In der Moultonebene gelten (P) und (p) nicht, denn für  $P_1 = (-1, 1), P_2 = (0, 1), P_3 = (\frac{1}{2}, 1) \in g = g_{0,1}$  und  $Q_1 = (1, 0), Q_2 = (0, 0), Q_3 = (-1, 0) \in h = g_{0,0}$  gelten zwar  $(P_1Q_2 = g_{-1,0}) \parallel (P_2Q_1 = g_{-1,1})$  und  $(P_2Q_3 = \tilde{g}_{1,1}) \parallel (P_3Q_2 = \tilde{g}_{1,0})$ , aber  $(P_1Q_3 = g_{-1}) \not\parallel (P_3Q_1 = g_{-2,2})$ .



**Def 4.2** (Großer Satz von Desargues, 1593 – 1662, (D))

Seien  $a, b, c$  paarweise verschiedene kopunktuale Geraden mit  $S \in a \cap b \cap c$ , seien  $A_i \in a, B_i \in b, C_i \in c$  für  $i = 1, 2$  von  $S$  verschiedene Punkte mit  $A_1B_1 \parallel A_2B_2, B_1C_1 \parallel B_2C_2$ . Dann folgt  $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ .

Gilt (D) in einer affinen Ebene, spricht man von einer *desarguesschen affinen Ebene*. Die Anschauungsebene ist so eine desarguessche Ebene. Ersetzt man in Definition 4.2 die Voraussetzung  $a, b, c$  *kopunktal* durch  $a, b, c$  *parallel*, liegt der sogenannte *kleine Satz von Desargues* vor, abgekürzt durch (d).



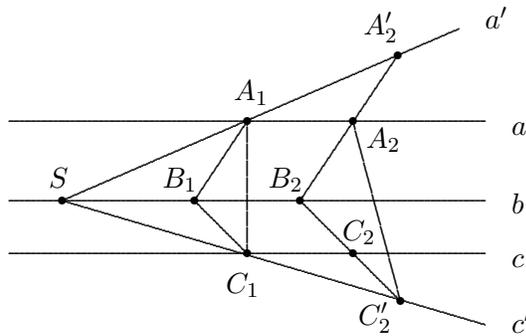
Wie bereits im letzten Kapitel gesehen, gilt (d) nicht in der Moultonebene.

Anders als bei dem kleinen und großen Satz von Pappus ist (d) auf Grund der geänderten Voraussetzungen kein Spezialfall von (D). Trotzdem gilt

**Satz 4.2** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (D)  $\Rightarrow$  (d).

**Beweisskizze:** Angenommen, in einer desarguesschen affinen Ebene gilt (d) nicht, d.h., es existieren Geraden  $a \parallel b \parallel c$  und Punkte  $A_1, A_2 \in a$ ,  $B_1, B_2 \in b$ ,  $C_1, C_2 \in c$  mit  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$  und  $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ , aber  $A_1C_1 \not\parallel A_2C_2$ .

Wie man leicht sieht, sind unter dieser Annahme alle beteiligten Punkte  $A_1, \dots, C_2$  paarweise verschieden und es muss gelten  $A_1C_1 \not\parallel B_1C_1$ . Sei  $C'_2 := B_2C_2 \cap (A_2, A_1C_1)$ .



Durch einfache, teilweise aber Zeit kostende Überlegungen erkennt man:  $C'_2 \notin b$ ,  $C'_2 \notin c$ ,  $C'_2 \neq C_1$ .

Damit existiert eindeutig die Gerade  $c' = C_1C'_2$ . Da man  $c' \parallel b$  leicht widerlegen kann, gibt es den Schnittpunkt  $S := b \cap c'$ .

Als nächstes zeigt man  $S \neq C_1, A_1, B_1, B_2, C'_2$ . Insbesondere folgt die Existenz der Geraden  $a' = SA_1$ .  $a'$  ist verschieden von  $b$  und  $c'$  (leicht einzusehen) und es gilt  $a' \not\parallel A_2B_2$  (sonst gibt es einen Widerspruch), also existiert  $A'_2 := a' \cap A_2B_2$ .

Nachdem man überlegt hat, dass  $A'_2 \neq S$  gelten muss, kann man (D) auf die Geraden  $a', b, c'$  und auf die Punkte  $S, A_1, A'_2, B_1, B_2, C_1, C'_2$  anwenden und erhält  $A_1C_1 \parallel A'_2C'_2$ .

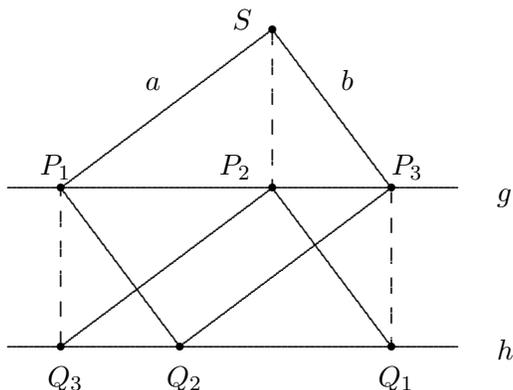
Wegen  $A_1C_1 \parallel (A_2, A_1C_1) = A_2C'_2$  liegen  $A_2, A'_2, C'_2$  kollinear.

Zuletzt macht man sich  $A_2 \neq A'_2$  klar. Wegen  $B_2 \in A_2A'_2$  folgt die kollineare Lage von  $A_2, B_2, C_2$ . Dieser Widerspruch ist nicht mehr zu retten, die Ungültigkeit von (d) ist widerlegt.

Es gibt weitere Verbindungen zwischen den Schließungssätzen:

**Satz 4.3** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (d)  $\Rightarrow$  (p).

**Beweis:** Die Voraussetzungen von (p) seien wie in der Skizze erfüllt, oBdA sei  $P_2Q_3 \parallel P_2Q_1$ . Wir setzen  $a := (P_1, P_3Q_2)$ ,  $b := (P_3, P_2Q_1)$  und  $S := a \cap b$ .



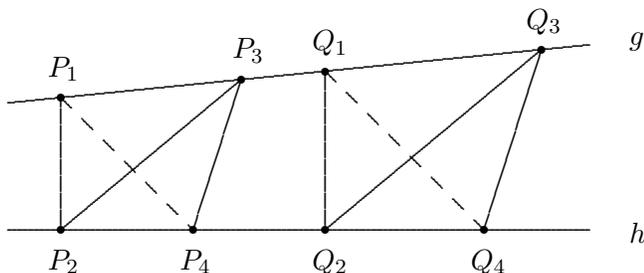
Wir wenden (d) zweimal an:

$$\begin{aligned}
 a \parallel P_2Q_3 \parallel P_3Q_2, \quad P_1Q_2 \parallel b, \quad (h = Q_2Q_3) \parallel (g = P_2P_3) &\Rightarrow P_1Q_3 \parallel SP_2 \\
 b \parallel P_2Q_1 \parallel P_1Q_2, \quad a \parallel P_3Q_2, \quad (g = P_1P_2) \parallel (h = Q_2Q_1) &\Rightarrow P_3Q_1 \parallel SP_2
 \end{aligned}$$

und erhalten aus der Transitivität der Parallelität die Behauptung  $P_1Q_3 \parallel P_3Q_1$ .

**Def 4.3** (Großer und kleiner Scherensatz, (S) bzw. (s))

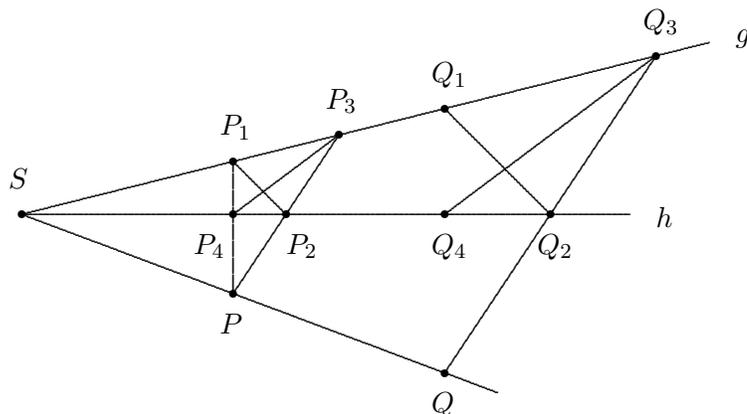
Seien  $g, h \in \mathbb{G}$  im Fall (S) beliebig bzw. parallel (für (s)). Für  $P_1, P_3, Q_1, Q_3 \in g \setminus h$ ,  $P_2, P_4, Q_2, Q_4 \in h \setminus g$  gelte  $P_iP_{i+1} \parallel Q_iQ_{i+1}$  für  $i = 1, 2, 3$ . Dann folgt  $P_1P_4 \parallel Q_1Q_4$ .



**Satz 4.4** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (D)  $\iff$  (S).

**Beweisskizze:** „ $\Rightarrow$ “:  $P_i, Q_i \in \mathbb{P}$ ,  $g, h \in \mathbb{G}$  mögen die Voraussetzungen von (S) erfüllen, zu zeigen ist  $P_1P_4 \parallel Q_1Q_4$ .

1. Fall  $g \cap h = S$ :



Weil die Behauptung für  $P_1P_4 \parallel P_2P_3$  und  $Q_1Q_4 \parallel Q_2Q_3$  direkt folgt, können wir oBdA von  $P_1P_4 \not\parallel P_2P_3$  ausgehen (notfalls vertausche man die Buchstaben  $P_i$  und  $Q_i$ ), es sei  $P := P_1P_4 \cap P_2P_3$ .

Wegen  $P \neq S$  und  $SP \not\parallel Q_2Q_3$  (indirekter Nachweis) existiert  $Q := SP \cap Q_2Q_3$ .

$SP = g$  oder  $SP = h$  ist nur möglich, falls einige der beteiligten Punkte zusammenfallen, in diesen Fällen folgt die Gültigkeit von (S) unmittelbar.

Ist  $SP \neq g, h$ , können wir (D) zweimal auf die Trägergeraden  $g, h, SP$  anwenden:

$$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2, P_2P \parallel Q_2Q \Rightarrow P_1P \parallel Q_1Q \quad \text{und} \quad P_3P_4 \parallel Q_3Q_4, P_3P \parallel Q_3Q \Rightarrow P_4P \parallel Q_4Q$$

Weil die Punkte  $P, P_1, P_4$  kollinear liegen, gilt  $P_1P = P_4P$ , wir erhalten

$$Q_1Q \parallel (P_1P = P_4P) \parallel Q_4Q \Rightarrow P_1P_4 \parallel Q_1Q_4$$

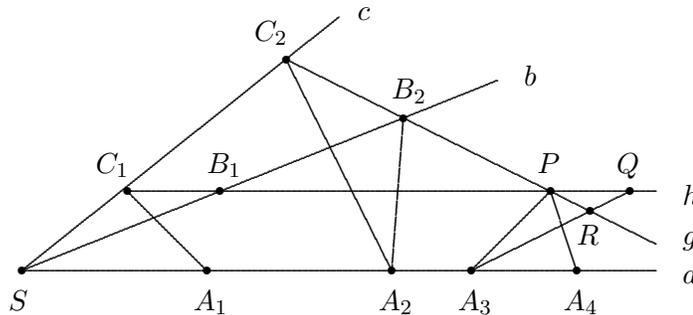
2. Fall  $g \parallel h$ : Der Beweis verläuft ähnlich zum ersten Fall. Statt  $PS$  benutzt man die Gerade  $(P, g)$  und an Stelle von (D) wird mit (d) argumentiert, was wegen Satz 4.2 erlaubt ist.

„ $\Leftarrow$ “:  $S, A_i, B_i, C_i \in \mathbb{P}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{G}$  mögen die Voraussetzungen von (D) erfüllen<sup>45</sup>, zu zeigen ist  $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ .

Bei den folgenden Überlegungen gehen wir davon aus, dass  $A_1, \dots, C_2$  paarweise verschieden sind und  $A_i, B_i, C_i$  nicht kollinear liegen (sonst folgt (D) trivialerweise).

Angenommen,  $B_1C_1 \not\parallel B_2C_2$ , d.h., es existiert  $P := B_1C_1 \cap B_2C_2$ .

1. Fall  $P \notin a$ : Es seien  $g := B_2C_2$  und  $h := B_1C_1$ .



Wir erhalten weitere Punkte:  $A_3 := a \cap (P, c)$ , es ist  $A_3 \notin g, h$ ;  $A_4 := a \cap (P, A_1C_1)$  mit  $A_4 \notin g, h$ ;  $Q := h \cap (A_3, b)$  mit  $Q \notin a$  und  $R := g \cap A_3Q$ ,  $R \notin a$ .

Wir wenden (S) mit den Trägergeraden  $h, a$  und  $g, a$  zweimal an :

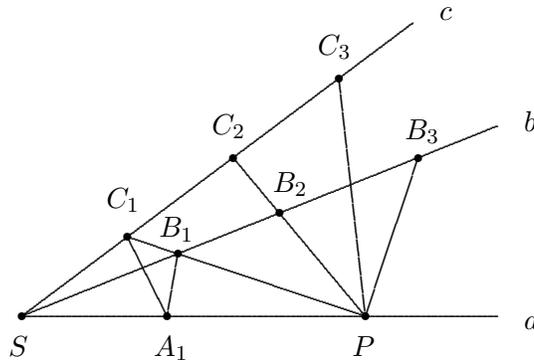
$$\begin{aligned} C_1S \parallel PA_3, C_1A_1 \parallel PA_4, B_1S \parallel QA_3 &\Rightarrow B_1A_1 \parallel QA_4 \\ C_2S \parallel PA_3, C_2A_2 \parallel PA_4, B_2S \parallel RA_3 &\Rightarrow B_2A_2 \parallel RA_4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow RA_4 = QA_4$ , weitere Überlegungen führen zu  $R = Q$  und  $P \neq R$  (beachte  $P \notin (A_3, b) \ni R$ )

$\Rightarrow B_2C_2 = PR = PQ = B_1C_1$ , Widerspruch!

2. Fall  $P \in a$ : Es seien  $C_3 := c \cap (P, A_1C_1)$  und  $B_3 := b \cap (P, A_1B_1)$ .

<sup>45</sup>Wir setzen  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$  und  $A_1C_1 \parallel A_2C_2$  voraus.



Wir erinnern uns an unsere Annahme  $B_1C_1 \not\parallel B_2C_2$ .  $B_3C_3$  kann also nicht zu beiden Geraden parallel sein. Sowohl  $B_2C_2 \not\parallel B_3C_3$  als auch  $B_1C_1 \not\parallel B_3C_3$  führt bei geeigneter Vorgehensweise zu Widersprüchen. daher muss  $B_1C_1 \parallel B_2C_2$  sein.<sup>46</sup>

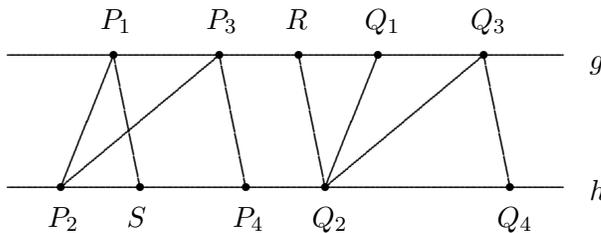
**Korollar** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (d)  $\Rightarrow$  (s).

**Beweis:** Genau dies wurde zweiten Fall der Beweisrichtung „ $\Rightarrow$ “ bewiesen.

**Satz 4.5** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (P)  $\Rightarrow$  (S).

**Beweisskizze:**  $P_i, Q_i \in \mathbb{P}$ ,  $g, h \in \mathbb{G}$  mögen die Voraussetzungen von (S) erfüllen, zu zeigen ist  $P_1P_4 \parallel Q_1Q_4$ .

Sei  $R := g \cap (Q_2, P_3P_4)$  und  $S := h \cap (P_1, P_3P_4)$ .



Wegen  $S \in h \setminus g$ ,  $R \in g \setminus h$  können wir (P) dreimal mit den Trägergeraden  $g$  und  $h$  anwenden:

$$\begin{aligned} P_1P_2 \parallel Q_1Q_2, \quad P_1S \parallel RQ_2 &\Rightarrow RP_2 \parallel Q_1S \\ P_3P_2 \parallel Q_3Q_2, \quad P_3P_4 \parallel RQ_2 &\Rightarrow RP_2 \parallel P_4Q_3 \\ P_1S \parallel Q_3Q_4, \quad Q_1S \parallel Q_3P_4 &\Rightarrow P_1P_4 \parallel Q_1Q_4 \end{aligned}$$

**Korollar** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (p)  $\Rightarrow$  (s).

**Satz 4.6** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (P)  $\Rightarrow$  (D).

**Beweis:** Satz 4.5, Satz 4.4

Alle Schließungssätze gelten in der Anschauungsebene, wir werden dies aber nicht beweisen. Im krassen Gegensatz hierzu verhält sich die Moultonebene: Zu jedem Satz findet man Punkte und Geraden, die zwar den Voraussetzungen, nicht aber der Folgerung genügen.

<sup>46</sup>Weitere Einzelheiten zu diesem Beweis findet man in R. Lingenberg, Grundlagen der Geometrie

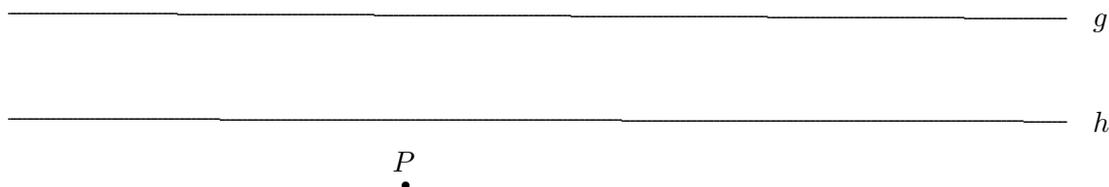
Es gibt ferner affine Ebenen, in denen (D), aber nicht (P) gilt; ebenso findet man Ebenen mit (d), in denen (D) nicht erfüllt ist. Die Schließungssätze können daher zu einer Klassifizierung der affinen Ebenen benutzt werden.

Es sind immer noch nicht alle Beziehungen zwischen den Schließungssätzen bekannt, offen ist beispielsweise die *Frage*: Gilt  $(p) \Rightarrow (d)$ ?

Wir fassen unser Wissen zusammen:

$$(P) \Rightarrow (D) \iff (S) \Rightarrow (d) \Rightarrow (p) \Rightarrow (s)$$

und schließen das Kapitel mit einer praktischen Anwendung von (D) in der Anschauungsebene:



Seien  $g, h \in \mathbb{G}$  und  $P \in \mathbb{P}$  wie in der Skizze gegeben. Man konstruiere die Gerade durch  $P$ , die im Fall  $g \parallel h$  zu  $g$  und  $h$  parallel ist oder andernfalls durch den Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  verläuft.

Die Lösung dieses Problems werden wir in den Übungen ermitteln.

## 5 Dilatationen

Wir wollen uns mit Abbildungen innerhalb einer affinen Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  beschäftigen. Wenn wir von Verschiebungen, Streckungen oder Drehungen reden, sind zunächst die (hoffentlich) aus dem Schulunterricht bekannten Abbildungen der Anschauungsebene gemeint, erst später werden wir diese Begriffe exakt definieren.  $\{P, Q\} \in \mathbb{P}_2$  bedeutet ab sofort, dass die Punkte  $P, Q \in \mathbb{P}$  *verschieden* sind.

**Def 5.1** Eine Abbildung  $\delta : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  heißt *Dilatation* :  $\iff \delta(Q) \in (\delta(P), PQ) \quad \forall \{P, Q\} \in \mathbb{P}_2$ .

Dilatationen bilden Geraden auf (Teilmengen von) Geraden ab, es kann passieren, dass alle Punkte das gleiche Bild besitzen. In diesem Fall, der uns nicht weiter interessieren wird, liegt eine sogenannte *ausgeartete* Dilatation vor. Wir werden später beweisen, dass nicht ausgeartete Dilatationen jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbilden.

*Beispiele*: 1) Die Identität ist eine Dilatation, sie kommt in jeder affinen Ebene vor.

2) In der Anschauungsebene ist jede Verschiebung und jede Streckung wegen  $\delta(g) \parallel g \quad \forall g \in \mathbb{G}$  eine Dilatation.

3) Drehungen in der Anschauungsebene sind nur in Ausnahmefällen Dilatationen, nämlich wenn der Drehwinkel ein Vielfaches von  $\pi$  ist.

*Frage/Übung*: Welche Abbildungen im Minimalmodell sind Dilatationen?

Im Folgenden wollen wir Dilatationen genauer kennenlernen. Wieviel muss eigentlich von einer Dilatation bekannt sein, damit sie eindeutig bestimmt ist?

**Satz 5.1** Seien  $\alpha, \beta$  Dilatationen,  $\{P, Q\} \in \mathbb{P}_2$  mit  $\alpha(P) = \beta(P) =: P', \alpha(Q) = \beta(Q) =: Q' \Rightarrow \alpha = \beta$ .

**Beweis:** Zu zeigen ist  $\alpha(R) = \beta(R)$  für alle Punkte  $R$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall  $R \notin PQ$ : Nach Definition der Dilatation ist  $\alpha(R) \in (\alpha(P), PR) = (\beta(P), PR) \ni \beta(R)$  und analog  $\alpha(R) \in (\alpha(Q), QR) = (\beta(Q), QR) \ni \beta(R)$ . Wegen  $PR \nparallel QR$  ist auch  $(\alpha(P), PR) \nparallel (\alpha(Q), QR)$ .

$$\Rightarrow |(\alpha(P), PR) \cap (\alpha(Q), QR)| = 1 \Rightarrow \alpha(R) = \beta(R)$$

2. Fall  $R \in PQ$ : Auf Grund des dritten Axioms (AE 3) gibt es einen Punkt  $S \notin PQ$ . Für diesen Punkt  $S$  gilt, wie im ersten Fall bewiesen,  $\alpha(S) = \beta(S)$ . Weil  $R \notin PS$ , wenden wir noch einmal den ersten Fall auf  $P, S, R$  an und erhalten die Behauptung  $\alpha(R) = \beta(R)$ .

**Korollar** Jede Dilatation mit zwei Fixpunkten ist die Identität.

**Beweis:**  $\alpha(P) = P = id(P), \alpha(Q) = Q = id(Q) \Rightarrow \alpha = id$

Leider kann man Satz 5.1 nicht auf Kollineationen übertragen, beispielsweise besitzt jede Geradenspiegelung in der Anschauungsebene unendlich viele Fixpunkte, ist aber verschieden von der Identität. Wir wollen den Zusammenhang zwischen Kollineationen und Dilatationen klären:

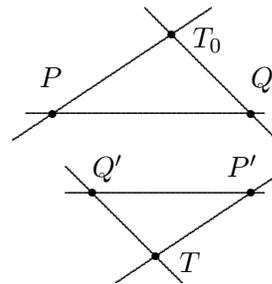
**Satz 5.2** Jede nicht ausgeartete Dilatation ist eine Kollineation.

**Beweis:** Nach Definition bilden Dilatationen Geraden auf Teilmengen von Geraden ab, es fehlt noch der Nachweis der Bijektivität. Im Folgenden sei  $\delta$  eine nicht ausgeartete Dilatation. Wir zeigen

1.  $\delta$  ist injektiv: Angenommen, für verschiedene  $A, B \in \mathbb{P}$  sei  $\delta(A) = \delta(B) =: P$ . Wir vergleichen  $\delta$  mit der ausgearteten Dilatation  $\delta_P$ , die jeden Punkt  $X$  auf  $P$  abbildet. Weil beide Dilatationen auf  $A$  und  $B$  übereinstimmen, gilt nach Satz 5.1  $\delta = \delta_P$ . Dies ist ein Widerspruch, also muss  $\delta$  injektiv sein.

2.  $\delta$  ist surjektiv: Wir suchen zu einem beliebigen Punkt  $T$  ein Urbild. Da  $\delta$  nicht ausgeartet ist, gibt es  $\{P, Q\} \in \mathbb{P}_2$  mit  $P' = \delta(P) \neq \delta(Q) =: Q'$ . Falls  $T \in \{P', Q'\}$ , ist nichts mehr zu zeigen. Falls  $T \notin \{P', Q'\}$ , untersuchen wir zuerst die Möglichkeit  $T \notin P'Q'$  (Fall 2.1):

Es folgt  $TP' \nparallel TQ' \Rightarrow (P, TP') \nparallel (Q, TQ')$ , diese Geraden haben genau einen Schnittpunkt  $T_0$ , der nach Definition der Dilatation das gesuchte Urbild von  $T$  ist.



Für  $T \in P'Q'$  (Fall 2.2) wählen wir einen beliebigen Punkt  $S \notin P'Q'$ . Wie gerade gezeigt  $\exists S_0 \in \mathbb{P}$  mit  $\delta(S_0) = S$ ; jetzt wenden wir Fall 2.1 auf  $T \notin P'S$  an.

Bezüglich der Verkettung als Verknüpfung bilden die nicht ausgearteten Dilatationen einer affinen Ebene eine Untergruppe aller Kollineationen; wir werden hierauf nicht näher eingehen. Weil ab jetzt ausschließlich nicht ausgeartete Dilatationen untersucht werden, vereinbaren wir zur Vereinfachung der Schreibarbeit, dass ab jetzt mit Dilatation stets eine nicht ausgeartete Dilatation gemeint ist.

**Def 5.2** Sei  $\alpha$  eine Kollineation.  $g \in \mathbb{G}$  heißt *Fixgerade*  $:\Leftrightarrow \forall P \in g : \alpha(P) \in g$

Die folgenden *Beispiele* beziehen sich auf die Anschauungsebene:

1)  $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$  ist eine Dilatation mit Fixgerade  $g_{1,0}$ :  $\tau(g_{1,0}) = \{\tau((x, x)) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{((x + 1, x + 1)) \mid x \in \mathbb{R}\} = g_{1,0}$ . Gibt es bei dieser Abbildung  $\tau$  weitere Fixgeraden?

2)  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$  ist eine Dilatation, jede Gerade durch  $(0, 0)$  ist eine Fixgerade.

3)  $(x, y) \mapsto (y, -x)$  ist eine Kollineation, aber keine Dilatation. Es gibt keine Fixgerade, obwohl jede Gerade  $g$  einen Punkt besitzt, der wieder auf  $g$  abgebildet wird. (Warum? Einzelheiten eventuell in den Übungen.)

Im Fall von Dilatationen besitzen Fixgeraden weitere interessante Eigenschaften.

**Satz 5.3** Sei  $\delta$  eine Dilatation, seien  $g, h \in \mathbb{G}$ . Dann gilt

- a)  $g$  ist Fixgerade  $\iff \exists P \in g$  mit  $\delta(P) \in g$
- b)  $g, h$  sind Fixgeraden mit  $g \nparallel h \Rightarrow g \cap h$  Fixpunkt

**Beweis:** a) „ $\Rightarrow$ “ ist klar, „ $\Leftarrow$ “: Sei  $P \in g$  mit  $\delta(P) \in g$ . Für jeden Punkt  $Q \in g$  gilt dann  $\delta(Q) \in (\delta(P), PQ) = g \Rightarrow g$  ist Fixgerade.

b) Sei  $P$  der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ . Weil  $g$  und  $h$  Fixgeraden sind, folgt  $\delta(P) \in g \cap h \Rightarrow P = \delta(P)$ .

Bei Dilatationen  $\delta \neq id$  liegen alle Fixgeraden *im Büschel*, d.h., entweder sie sind alle parallel oder sie haben genau einen Punkt gemeinsam (denn mehr als ein Schnittpunkt hat die Identität zur Folge).

Wieviele Fixpunkte kann eine Dilatation haben? Weil jede Dilatation mit mehr als einem Fixpunkt die Identität ist, gibt es nur drei Möglichkeiten: Kein Fixpunkt, ein Fixpunkt oder jeder Punkt ist Fixpunkt.

**Def 5.3** Eine Dilatation  $\tau$  heißt *Translation*:  $\iff \tau = id$  oder  $\tau$  besitzt keinen Fixpunkt.

Die Menge aller Translationen schreiben wir  $\mathcal{T}$ , bezüglich der Verkettung bilden alle Translationen eine Untergruppe der Dilatationen.

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene ist jede Abbildung  $(x, y) \mapsto (x+a, y+b)$  eine Translation (näheres eventuell in den Übungen).

2) In der Minimalebene mit den vier Punkten  $A, B, C, D$  ist  $A \mapsto B \mapsto A, C \mapsto D \mapsto C$  eine Translation.

**Satz 5.4** Für  $\tau \in \mathcal{T} \setminus \{id\}$  bildet die Menge aller Fixgeraden ein Parallelbüschel.

**Beweis:** Eventuell Übungsaufgabe.

Wir haben gesehen, dass bei einer beliebigen Dilatation zwei Paare Punkt – Bildpunkt ausreichen, um die Abbildung eindeutig festzulegen. Bei Translationen geht es noch einfacher:

**Satz 5.5** Seien  $\tau_1, \tau_2$  Translationen mit  $\tau_1(P) = \tau_2(P)$  für ein  $P \in \mathbb{P}$ . Dann gilt  $\tau_1 = \tau_2$ .

**Beweis:** Sei  $\tau_1(P) = \tau_2(P) = P' \neq P$  (sonst liegt ein Fixpunkt vor und nach Definition 5.3 gilt  $\tau_1 = id = \tau_2$ ). Sei  $R \notin PP'$ . Nach den letzten beiden Sätzen ist  $\tau_i(R) \in (R, PP')$ . Für  $i = 1, 2$  gilt damit  $\tau_i(R) \in (R, PP') \cap (P', PR) \Rightarrow \tau_1(R) = \tau_2(R)$ , nach Satz 5.1 stimmen die Abbildungen überein.

Zu  $P, Q \in \mathbb{P}$  kann es in einer affinen Ebene höchstens eine Translation geben, die  $P$  auf  $Q$  abbildet. In der Anschauungsebene gibt es auch immer so eine Abbildung, zu  $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$  wähle man  $\tau((x, y)) := (x + (q_1 - p_1), y + (q_2 - p_2))$ . Dies trifft jedoch nicht auf jede affine Ebene zu:

*Behauptung:* In der Moultonebene existiert keine Translation, die  $P := (-1, 0)$  auf  $Q := (0, 0)$  abbildet.

*Beweis:*<sup>47</sup> Angenommen,  $\tau$  ist eine Translation mit  $\tau(P) = Q$ . Damit ist  $PQ = g_{0,0}$  und jede zu ihr parallele Gerade eine Fixgerade. Wir bestimmen  $\tau(R)$  für  $R = (0, 1)$ :

$$\tau(R) = (R, PQ) \cap (Q, PR) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) =: R'$$

Wie finden wir das Bild von  $S = (0, -1)$  unter  $\tau$ ? Es muss gelten

$$\tau(S) \in (S, PQ) = g_{0,-1}, \quad \tau(S) \in ((Q, PS) = g_{-1,0}, \quad \tau(S) \in (R', RS) = g_{\frac{1}{2}}$$

Es gibt aber keinen gemeinsamen Schnittpunkt dieser drei Geraden!

**Def 5.4** Eine affine Ebene heißt *Translationsebene* :  $\iff \forall \{P, Q\} \in \mathbb{P}_2 \exists \tau \in \mathcal{T} : \tau(P) = Q$

Minimalmodell und Anschauungsebene sind Translationsebenen, die Moultonsebene ist keine Translationsebene. Ohne Beweis geben wir den folgenden Satz an, der eine Verbindung zu den Schließungssätzen herstellt:

**Satz 5.6** Eine affine Ebene ist genau dann eine Translationsebene, wenn in ihr der kleine Satz von Desargues (d) gilt.

Als nächstes beschäftigen wir uns mit den Dilatationen mit Fixpunkt.

**Def 5.5** Eine Dilatation  $\sigma$  heißt *Streckung* :  $\iff \sigma$  besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Eine Streckung hat entweder genau einen Fixpunkt, der auch *Zentrum* genannt wird, oder es liegt die identische Abbildung vor.

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene ist jede Abbildung  $(x, y) \mapsto (ax, ay)$  für  $a \neq 0$  eine Streckung; denn  $(0, 0)$  ist Fixpunkt,  $\sigma$  ist bijektiv und wegen  $\sigma(g_k) = g_{ak} \parallel g_k$ ,  $\sigma(g_{m,b}) = g_{m,ab} \parallel g_{m,b}$  liegt eine Dilatation vor.

2) In der Anschauungsebene ist die Abbildung  $(x, y) \mapsto (2x, 3y)$  keine Streckung;  $\sigma(g_{1,0}) = g_{\frac{3}{2},0} \not\parallel g_{1,0}$ .

3) In der affinen Ebene mit 9 Punkten und 12 Geraden gibt es zu jedem Punkt genau eine Streckung, die genau diesen Punkt fest lässt.

Im Gegensatz zu den Translationen bilden die Streckungen keine Untergruppe der Dilatationen. Um dies einzusehen, betrachten wir in der Anschauungsebene folgende Abbildungen:

1)  $\sigma((x, y)) = (-x, -y)$  ist eine Streckung.

2)  $\tau((x, y)) = (x - 1, y)$  ist eine Translation und keine Streckung.

3)  $(\tau^{-1}\sigma\tau)((x, y)) = \tau^{-1}(\sigma((x-1, y))) = \tau^{-1}((1-x, -y)) = (1-x+1, -y) = (2-x, -y)$  ist eine Streckung, denn  $(1, 0)$  ist einziger Fixpunkt. Dies kann man elementar ausrechnen oder elegant durch Widerspruch beweisen: Angenommen, es gibt keinen Fixpunkt. Dann ist  $\tau^{-1}\sigma\tau = \alpha$  eine Translation. Translationen bilden eine Gruppe, also ist auch  $\sigma = \tau\alpha\tau^{-1}$  eine Translation, Widerspruch.

Würden die Streckungen bezüglich der Verkettung eine Untergruppe bilden, müsste auch  $\sigma \circ (\tau^{-1}\sigma\tau)$  eine Streckung sein, aber  $\sigma\tau^{-1}\sigma\tau$  hat wegen  $(\sigma\tau^{-1}\sigma\tau)((x, y)) = (x - 2, y)$  keinen Fixpunkt.

Während es in der Anschauungsebene zu Punkten  $A, B$  stets genau eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(A) = B$  gibt, verhält es sich mit Streckungen etwas anders.

<sup>47</sup>Siehe hierzu auch die Skizze auf Seite 158.

*Beispiel:*  $\sigma_1 : (x, y) \mapsto (2 - x, -y)$  und  $\sigma_2 : (x, y) \mapsto (3x + 2, 3y)$  sind verschiedene Streckungen, die beide  $(0, 0)$  auf  $(2, 0)$  abbilden.

**Def 5.6** Eine affine Ebene heißt *Streckungsebene* :  $\iff \forall Z, P, Q \in \mathbb{P}$  kollinear,  $Z \neq P, Q \exists$  Streckung  $\sigma$  mit  $\sigma(Z) = Z$  und  $\sigma(P) = Q$ .

Wegen Satz 5.1 ist diese Streckung eindeutig bestimmt. Ein Beispiel für eine Streckungsebene ist die Anschauungsebene. Die Moultonenebene ist keine Streckungsebene.

Wir wollen in der Anschauungsebene alle Streckungen mit Zentrum (Fixpunkt)  $Z = O = (0, 0)$  angeben: Sei  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  beliebig. Weil Streckungen spezielle Dilatationen sind, muss gelten

$$\sigma(X) \in (\sigma(O), OX) = OX, \quad \text{d.h.} \quad \sigma(X) = (\alpha x, \alpha y) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

Für jede reelle Zahl  $\alpha$  ist  $\sigma(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$  eine Streckung mit Fixpunkt  $O$  (für  $\alpha = 0$  liegt eine ausgeartete Dilatation vor).

Wir wollen verallgemeinern und suchen als *Beispiel* die Streckung mit Fixpunkt  $Z = (0, 1)$ , die  $P = (1, 2)$  auf  $Q = (-2, -1)$  abbildet.

Weil diese Punkte kollinear liegen, muss es genau eine solche Streckung geben. Wir gehen schrittweise vor:

1) Es gibt eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(Z) = O$ , nämlich  $\tau((x, y)) := (x, y - 1)$ . Für diese Abbildung gilt  $\tau(P) = (1, 1)$  und  $\tau(Q) = (-2, -2)$ .

2) Es gibt eine Streckung  $\sigma$  mit  $\sigma(O) = O$  und  $\sigma((1, 1)) = (-2, -2)$ , nämlich  $\sigma((x, y)) := (-2x, -2y)$ .

3) Es gibt eine Translation, die  $O$  auf  $Z$  abbildet, nämlich  $\tau^{-1}$  aus 1), also  $\tau^{-1}((x, y)) = (x, y + 1)$ .

4) Für  $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$  gilt  $\tau^{-1} \sigma \tau(Z) = \tau^{-1} \sigma(O) = \tau^{-1}(O) = Z$  und  $\tau^{-1} \sigma \tau(P) = \tau^{-1}(\sigma(\tau(P))) = \tau^{-1}(\tau(Q)) = Q$ , allgemein ist  $\tau^{-1} \sigma \tau((x, y)) = \tau^{-1} \sigma((x, y - 1)) = \tau^{-1}((-2x, -2y + 2)) = (-2x, -2y + 3)$ .

Als Übungsaufgabe versuche man, die analoge Abbildung für beliebige kollineare Punkte  $Z, P, Q$  anzugeben!

Wie bei Translationsebenen gibt es auch für Streckungsebenen einen charakteristischen Schließungssatz:

**Satz 5.7** Eine affine Ebene ist genau dann eine Streckungsebene, wenn in ihr der große Satz von Desargues (D) gilt.

## 6 Normale euklidische Ebenen

Bisher haben wir uns ausschließlich mit inzidenzgeometrischen Aspekten beschäftigt und beispielsweise untersucht, ob Punkte kollinear liegen oder ob Geraden parallel sind. Mit Hilfe von Schließungssätzen oder der Existenz von Dilatationen konnten wir affine Ebenen klassifizieren. In diesem Abschnitt werden wir zusätzliche Axiome kennenlernen, durch die sich die Anschauungsebene eindeutig von allen anderen affinen Ebenen unterscheidet.

Beschränken wir uns hierzu für einen Augenblick auf die Anschauungsebene und erinnern uns an die Schulzeit.

*Fragen:* Was ist eine Strecke und wie stellt man fest, ob zwei Strecken gleich lang sind oder nicht?

Nachdem wir diese Fragen in der Vorlesung beantwortet haben, stellen wir fest, dass Strecken in der Anschauungsebene eindeutig durch zwei Randpunkte festgelegt sind. Der Vergleich zweier Strecken bedeutet die Überprüfung, ob diese Strecken in einer Relation (gleich lang?) zueinander stehen. Wie man leicht sieht, handelt es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation.

Kehren wir zu beliebigen affinen Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  zurück. Wir wollen jedes Punktepaar  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$  als *Strecke* bezeichnen. Auf der Menge aller Punktepaare  $\mathbb{P}_2$  sei eine zunächst beliebige Äquivalenzrelation  $\equiv$  gegeben. Falls  $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$  für  $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$  erfüllt ist (gesprochen:  $\{A, B\}$  ist kongruent zu  $\{C, D\}$ ), wollen wir diese Strecken *gleich lang* nennen.

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene messen wir die Länge der Strecke zwischen Punkten  $A = (a_1, a_2)$  und  $B = (b_1, b_2)$  durch  $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ . Genau dann, wenn diese Werte für verschiedene Strecken übereinstimmen, sind sie gleich lang.

2) Wir stellen uns das Minimalmodell einer affinen Ebene als regelmäßiges Tetraeder vor. Weil alle Kanten gleich lang sind, setzen wir  $\{A, B\} \equiv \{C, D\} \quad \forall \{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$ .

Es ist wahrscheinlich aufgefallen, dass bei uns Strecken  $\{A, B\}$  nur aus zwei Punkten bestehen und nicht, wie in der Schule üblich, aus allen Punkten „dazwischen“. Der einzige Grund für diese Vorgehensweise ist, dass die Streckendefinition als Punktepaar problemlos auf jeder affinen Ebene möglich ist. (Wie soll „liegt zwischen“ in beliebigen affinen Ebenen erklärt sein?)

Ab jetzt sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  eine affine Ebene mit einer Äquivalenzrelation  $\equiv$  auf  $\mathbb{P}_2$ . Wir führen mit Hilfe dieser Relation weitere Begriffe ein:

**Def 6.1** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  eine affine Ebene, sei  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ . Dann heißt

- a)  $m_{A,B} := \{X \in \mathbb{P} \mid \{A, X\} \equiv \{X, B\}\}$  *Mittelsenkrechte* von  $\{A, B\}$ .
- b)  $k_A(B) := \{X \in \mathbb{P} \mid \{A, X\} \equiv \{A, B\}\}$  *Kreis* mit *Mittelpunkt*  $A$  durch  $B$ .

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene mit der üblichen Längenmessung ist  $m_{(0,0)(2,0)} = g_1$ :

$X = (x, y) \in m_{(0,0)(2,0)} \iff \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \iff 0 = -4x + 4 \iff (x, y) = (1, y)$ , also  $m_{(0,0)(2,0)} = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = g_1$ .

$k_{(0,0)}((2,0)) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ , die entsprechende Rechnung wird in den Übungen durchgeführt. Mittelsenkrechte und Kreise aus Definition 6.1 sind genau die Gebilde, die uns aus der Schule unter diesen Namen bekannt sind!

2) Definiert man in der Minimalebene  $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$  für alle  $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$ , so ist  $m_{A,B} = \{C, D\}$  und  $k_A(B) = \{B, C, D\}$ .

**Def 6.2** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine affine Ebene, seien  $A_1, \dots, A_4 \in \mathbb{P}$  paarweise verschieden.  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  heißt *Parallelogramm* :  $\iff A_1A_2 \parallel A_3A_4 \nparallel A_2A_3 \parallel A_1A_4$

Zum mathematischen Allgemeinwissen gehört, dass in der Anschauungsebene gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms als Strecken aufgefasst die gleiche Länge besitzen. Dies ist nicht in jeder affinen Ebene so, ein Gegenbeispiel liefert einmal mehr die Moultonebene mit dem Parallelogramm  $(-2, 0), (0, 0), (1, 1), (0, 1)$  bei gleicher Längendefinition wie in der Anschauungsebene.

Eine andere Binsenweisheit der Anschauungsebene besagt, dass jeder Kreis jede Gerade, die durch den Kreismittelpunkt verläuft, in genau zwei Punkten schneidet. Auch dies gilt nicht in jeder affinen Ebene, diesmal finden wir ein Gegenbeispiel im Minimalmodell, hier ist  $k_A(B) \cap AB = \{B\}$ .

Offensichtlich können wir diese beiden Eigenschaften benutzen, um die Anschauungsebene von anderen affinen Ebenen zu unterscheiden.

**Def 6.3** Eine affine Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$

- 1) genügt dem *Kreisschnittaxiom* (KS) :  $\iff |k_A(B) \cap AB| = 2 \quad \forall \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$
- 2) genügt dem *Parallelogrammaxiom* (PG) :  $\iff \{A, B\} \equiv \{C, D\}$  für alle Parallelogramme  $(A, B, C, D)$ .
- 3) heißt *normale euklidische Ebene* :  $\iff$  es gelten (KS) und (PG).

Wie bereits in den Beispielen gesehen, ist die Anschauungsebene im Gegensatz zur Moultonenebene und zum Minimalmodell eine normale euklidische Ebene.

Leider gibt es normale euklidische Ebenen, die sich wesentlich von der Anschauungsebene unterscheiden. Um die Anschauungsebene eindeutig von *allen* anderen Ebenen abzuheben, sind weitere Axiome notwendig.

**Def 6.4** In einer affinen Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  heißt

- a)  $g \in \mathbb{G}$  *Tangente* an den Kreis  $k$  :  $\iff |g \cap k| = 1$ .
- b)  $P \in \mathbb{P}$  *innerer Punkt* eines Kreises  $k$  :  $\iff P$  liegt auf keiner Tangente an  $k$ .
- c)  $k^\circ := \{X \in \mathbb{P} \mid X \text{ innerer Punkt von } k\}$  *Inneres* von  $k$ .
- d)  $k \cup k^\circ$  *abgeschlossene Kreisscheibe*.

Weil diese Begriffe in der Anschauungsebene genau unseren Vorstellungen entsprechen, verzichten wir auf explizite Beispiele.

**Def 6.5** Eine affine Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$

- 1) genügt dem *euklidischen Axiom* (E) :  $\iff$  Jede Gerade durch einen inneren Punkt eines Kreises trifft diesen Kreis.
- 2) genügt dem *Vollständigkeitsaxiom* (V) :  $\iff$  Sind  $k_1, k_2$  abgeschlossene Kreisscheiben mit gleichem Mittelpunkt  $M$  und gilt  $k_1 \subsetneq k_2$ , so existiert eine weitere abgeschlossene Kreisscheibe  $k_3$  mit Mittelpunkt  $M$  und  $k_1 \subsetneq k_3 \subsetneq k_2$ .
- 3) heißt *vollständige euklidische Ebene* :  $\iff$  es gelten (E) und (V).

Wer ein gutes Gedächtnis hat, erinnert sich an ein ähnliches Vollständigkeitsaxiom, das wir im ersten Semester zur Charakterisierung der reellen Zahlen kennengelernt haben. Mit dem folgenden Satz, den wir nicht beweisen werden, haben wir ein Ziel dieser Vorlesung, nämlich die Anschauungsebene eindeutig durch Axiome festzulegen, erreicht:

**Satz 6.1** Jede vollständige euklidische Ebene ist isomorph zur Anschauungsebene.

Normale euklidische Ebenen heißen übrigens nur dann isomorph, wenn eine bijektive Abbildung existiert, die kollineare Punkte auf kollineare Punkte und außerdem gleichlange Strecken auf gleichlange Strecken abbildet. Weitere Eigenschaften solcher Isomorphismen sind im folgenden Satz zusammengefasst:

**Satz 6.2** Sei  $\varphi$  ein Isomorphismus zwischen affinen Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  und  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}', \equiv')$ . Dann gilt für alle  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$

- a)  $\varphi(m_{A,B}) = m_{\varphi(A)\varphi(B)}$

$$b) \varphi(k_A(B)) = k_{\varphi(A)}(\varphi(B))$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: a) } \varphi(m_{A,B}) &= \{\varphi(X) \mid \{A, X\} \equiv \{B, X\}\} = \{\varphi(X) \mid \{\varphi(A), \varphi(X)\} \equiv' \{\varphi(B), \varphi(X)\}\} \\ &= m_{\varphi(A)\varphi(B)} \end{aligned}$$

$$b) \varphi(k_A(B)) = \{\varphi(X) \mid \{A, X\} \equiv \{A, B\}\} = \{\varphi(X) \mid \{\varphi(A), \varphi(X)\} \equiv' \{\varphi(A), \varphi(B)\}\} = k_{\varphi(A)}(\varphi(B))$$

Isomorphismen bilden Mittelsenkrechte auf Mittelsenkrechte, Kreise auf Kreise und Parallelelogramme auf Parallelelogramme ab. (*Frage*: Warum gilt das Letztere?)

## 7 Bewegungen Teil 1: Punktspiegelungen

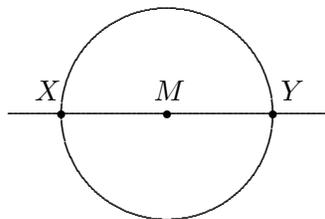
Mit den Dilatationen haben wir Kollineationen kennengelernt, die Geraden auf parallele Geraden abbilden. Jetzt wollen wir uns mit Abbildungen beschäftigen, die „distanztreu“ sind. Hierzu benötigen wir eine Äquivalenzrelation  $\equiv$  auf der Menge der Punktepaare. Um allzu exotische Fälle von vorneherein auszuschließen, gehen wir von einer normalen euklidischen Ebene aus. An einigen Stellen werden wir außerdem voraussetzen, dass die Geradenmenge  $\mathbb{G}$  mit der Menge der Mittelsenkrechten übereinstimmt. Dies ist in der Anschauungsebene selbstverständlich und wir werden uns nicht mit der Frage befassen, ob es überhaupt Ebenen geben kann, in denen es anders ist. Alle folgenden Aussagen gelten in solchen „gutartigen“ normalen euklidischen Ebenen. Um dies deutlich zu machen, benutzen wir die allgemeine Notation  $\equiv$  für „gleich lang“. Wem dies zu unheimlich ist, der möge sich unter  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  lediglich die Anschauungsebene vorstellen!

**Def 7.1** Eine Kollineation  $\varphi$  heißt *Bewegung*:  $\iff \{A, B\} \equiv \{\varphi(A), \varphi(B)\} \quad \forall \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$

Bewegungen sind *distanztreue* Abbildungen, bezüglich der Verkettung bilden sie eine Untergruppe der Kollineationsgruppe.

*Frage*: Wer kennt Beispiele für Bewegungen?

Wir wollen eine spezielle Bewegung, die etwas mit Kreisen und dem Kreisschnittaxiom zu tun hat, kennenlernen und genauer untersuchen.



Sei  $M \in \mathbb{P}$  fest gewählt. Für jeden Punkt  $X \neq M$  trifft die Gerade  $MX$  den Kreis  $k_M(X)$  außer in  $X$  in genau einem weiteren Punkt  $Y$ , der vom Kreismittelpunkt  $M$  die gleiche Entfernung hat wie  $X$ ; denn nach dem Kreisschnittaxiom ist  $\{X, M\} \equiv \{Y, M\}$ .

**Def 7.2** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  eine normale euklidische Ebene. Für jeden Punkt  $M$  heißt die Abbildung

$$\varphi_M : \begin{cases} \mathbb{P} & \rightarrow & \mathbb{P} \\ X & \mapsto & \begin{cases} M & \text{für } X = M \\ Y & \text{für } X \neq M \text{ mit } Y \in MX \setminus \{X\}, \{M, X\} \equiv \{M, Y\} \end{cases} \end{cases}$$

*Punktspiegelung an M.*

Wenn klar ist, an welchem Punkt gespiegelt wird, werden wir an Stelle von  $\varphi_M$  manchmal kürzer  $\varphi$  schreiben.

Jede Streckung mit Zentrum  $M$  und Streckungsfaktor  $-1$  ist eine Punktspiegelung. Wir wollen Eigenschaften von beliebigen Punktspiegelungen (in beliebigen normalen euklidischen Ebenen) zusammenstellen.

*Beh. 1:* Jede Punktspiegelung hat genau einen Fixpunkt.

*Bew.:* Folgt direkt aus der Definition:  $\varphi_M(M) = M$ ,  $\varphi_M(X) \neq X$  für  $X \neq M$ .

Bei den nächsten Behauptungen verwenden wir statt  $\varphi_M$  die kürzere Schreibweise  $\varphi$ .

*Beh. 2:* Jede Punktspiegelung ist surjektiv.

*Bew.:* Sei  $Y \in \mathbb{P}$  beliebig. Für  $Y = M$  ist  $M$  das Urbild, für  $Y \neq M$  folgt aus dem Kreisschnittaxiom  $k_M(Y) \cap MY = \{Y, X\} \in \mathbb{P}_2$  mit  $\{Y, M\} \equiv \{X, M\}$ .  $X$  ist das gesuchte Urbild:  $\varphi(X) = Y$ .

*Beh. 3:* Jede Punktspiegelung ist injektiv.

*Bew.:* Zu zeigen ist  $\varphi(X_1) \neq \varphi(X_2)$  für alle  $\{X_1, X_2\} \in \mathbb{P}_2$ . Wir untersuchen verschiedene Fälle:

1. Fall  $M \in \{X_1, X_2\}$ , sei oBdA  $M = X_1 \Rightarrow \varphi(X_1) = M \neq \varphi(X_2)$ .
2. Fall  $M \notin \{X_1, X_2\}$ . Für  $M \notin X_1X_2$  folgt  $\varphi(X_1) \in MX_1 \not\equiv \varphi(X_2)$ . Für  $M \in X_1X_2$  unterscheiden wir weitere Fälle:

- a)  $\{M, X_1\} \not\equiv \{M, X_2\}$ . Weil nach Definition  $\{M, X_i\} \equiv \{M, \varphi(X_i)\}$  für  $i = 1, 2$  gilt, ist  $\{M, \varphi(X_1)\} \not\equiv \{M, \varphi(X_2)\}$  und damit  $\varphi(X_1) \neq \varphi(X_2)$ .
- b)  $\{M, X_1\} \equiv \{M, X_2\} \Rightarrow X_1 \in k_M(X_2)$  und  $X_2 \in k_M(X_1) \Rightarrow \varphi(X_1) = X_2 \neq X_1 = \varphi(X_2)$ .

*Beh. 4:* Jede Punktspiegelung ist selbstinvers (involutorisch).

*Bew.:* Es ist  $\varphi^2(M) = M$ . Für  $\varphi(X) = Y$  mit  $Y \in MX \setminus \{X\}$ ,  $\{X, M\} \equiv \{Y, M\}$  folgt  $\varphi^2(X) = \varphi(Y)$  mit  $\varphi(Y) \in (MY = MX) \setminus \{Y\}$ ,  $\{Y, M\} \equiv \{\varphi(Y), M\} \Rightarrow \varphi(Y) = X \Rightarrow \varphi^2 = \text{id}$ .

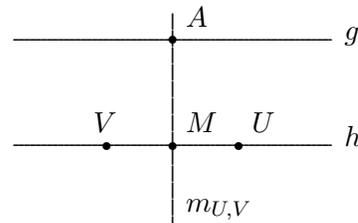
*Beh. 5:* Jede Punktspiegelung ist eine Streckung.

*Bew.:* Sei  $\varphi$  eine Punktspiegelung an  $M$ . Weil wir bereits wissen, dass  $\varphi$  bijektiv ist und genau einen Fixpunkt besitzt, bleibt „nur“ noch zu zeigen, dass jede Gerade  $g$  unter  $\varphi$  auf eine zu  $g$  parallele Gerade abgebildet wird. Für Geraden  $g$  mit  $M \in g$  ist natürlich  $\varphi(g) = g$ , der andere Fall  $M \notin g$  bereitet leider etwas Mühe.

Es sei  $h := (M, g)$ ,  $U \in h \setminus \{M\}$  und  $V = \varphi(U)$ , damit ist  $\{U, M\} \equiv \{V, M\}$ .

Wegen  $m_{U,V} = \{X \in \mathbb{P} \mid \{U, X\} \equiv \{V, X\}\}$  gilt  $M \in h \cap m_{U,V}$  und  $U \in h \setminus m_{U,V}$ . Aus  $h \parallel g$  folgt  $m_{U,V} \not\parallel g$ .

Sei  $A := g \cap m_{U,V}$ , also  $\{A, U\} \equiv \{A, V\}$ .



Weil  $A, U, V$  nicht kollinear sind, legt der eindeutig bestimmte Punkt  $B := (V, AU) \cap (U, AV)$  das Parallelogramm  $(U, A, V, B)$  fest mit  $\{B, V\} \equiv \{A, U\} \equiv \{A, V\} \equiv \{B, U\}$ <sup>48</sup>  $\Rightarrow B \in m_{U,V}$ .

Aus  $\{A, U\} \equiv \{B, U\}$  und  $\{A, V\} \equiv \{B, V\}$  folgt außerdem  $U, V \in m_{A,B} = h$ .<sup>49</sup> Damit ist  $M \in h = m_{A,B}$  und wir erhalten  $\{M, A\} \equiv \{M, B\}$  und hieraus  $\varphi(A) = B$ .

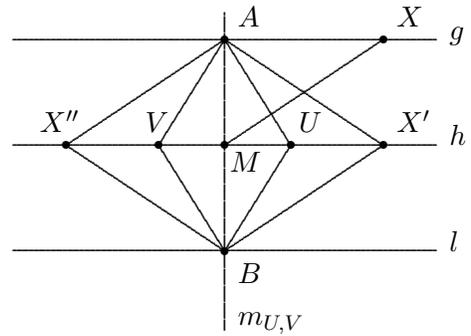
<sup>48</sup>Hier geht das Axiom (PG) ein.

<sup>49</sup>Hier benutzen wir die Gleichheit von Geraden und Mittelsenkrechten.

Zu zeigen ist  $\varphi(g) = (B, g) =: l$ , d.h., für jeden beliebigen Punkt  $X \in g \setminus \{A\}$  ist  $\varphi(X) \in l$  nachzuweisen.

Es sei  $X' := h \cap (B, MX)$ .  $B, X', A$  liegen nicht kollinear, daher gibt es genau ein  $X'' \in \mathbb{P}$ , so dass  $(B, X', A, X'')$  ein Parallelogramm ist, d.h., es gilt  $\{A, X''\} \equiv \{B, X'\}$  und  $\{A, X'\} \equiv \{B, X''\}$ .

Wegen  $h = m_{A,B}$  ist ferner  $\{X', A\} \equiv \{X', B\} \Rightarrow X'' \in h$ .



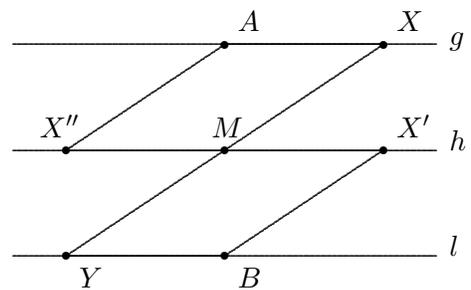
Nach Definition von  $X'$  ist  $MX \parallel BX'$ , ferner ist  $BX' \parallel AX''$ . Damit erhalten wir ein weiteres Parallelogramm  $(X, M, X'', A)$  (beachte  $(MX'' = h) \parallel (g = AX)$ ) mit  $\{X, M\} \equiv \{A, X''\}$ .

Da  $XM \not\parallel h$  existiert  $Y := l \cap XM$  mit  $Y \neq B$

Wegen  $(BY = l) \parallel (h = X'M)$  und  $(YM = XM) \parallel BX'$  ist auch  $(B, X', M, Y)$  ein Parallelogramm mit  $\{B, X'\} \equiv \{M, Y\}$

Insgesamt folgt für die kollinearen Punkte  $X, M, Y$

$Y = \varphi(X) \in l$ , was zu zeigen war.



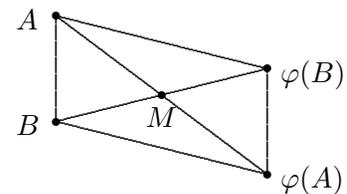
*Beh. 6:* Sei  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ ,  $M \notin AB$ . Für jede Punktspiegelung  $\varphi$  an  $M$  ist  $(A, B, \varphi(A), \varphi(B))$  ein Parallelogramm.

*Bew.:* Wegen  $M \notin AB$  ist  $AB \not\parallel B\varphi(A)$ .

Aus Behauptung 5 folgt  $AB \parallel \varphi(A)\varphi(B)$

Aus den Behauptungen 4 und 5 folgt

$A\varphi(B) \parallel \varphi(A)\varphi^2(B) = \varphi(A)B$ .



*Beh. 7:* Jede Punktspiegelung  $\varphi$  an  $M$  ist eine Bewegung.

*Bew.:* Wir haben bereits nachgewiesen, dass  $\varphi_M = \varphi$  eine Kollineation ist, zu zeigen bleibt die Distanztreue, d.h.

$$\{A, B\} \equiv \{\varphi(A), \varphi(B)\} \quad \forall \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$$

Für  $M \notin AB$  folgt dies aus der letzten Behauptung und dem Parallelogrammaxiom, denn  $(A, B, \varphi(A), \varphi(B))$  ist ein Parallelogramm.

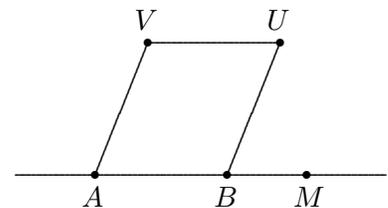
Für  $M \in AB$  wählen wir  $U \notin AB$ .

Mit  $V := (A, BU) \cap (U, AB)$  ist  $(A, B, U, V)$  ein Parallelogramm, es folgt  $\{A, B\} \equiv \{U, V\}$ .

Weil  $M \notin UV$  ist  $\{U, V\} \equiv \{\varphi(U), \varphi(V)\}$ .

Weil  $\varphi$  eine Kollineation ist, ist auch  $(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(U), \varphi(V))$  ein Parallelogramm, also gilt

$\{\varphi(A), \varphi(B)\} \equiv \{\varphi(U), \varphi(V)\}$ , womit alles gezeigt ist.



Mit den Behauptungen 1 – 7 haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz 7.1** In normalen euklidischen Ebenen sind Punktspiegelungen

- a) involutorische Streckungen mit einzigem Fixpunkt  $M$
- b) Bewegungen

Aus unserer Erfahrung mit der Anschauungsebene verbinden wir mit dem Namen Mittelsenkrechte Vorstellungen von „senkrecht stehen“ und „Mitte“. Diese Begriffe sind bisher nicht vorgekommen, für uns bestehen Mittelsenkrechte nur aus allen Punkten, die den gleichen Abstand zu zwei gegebenen Punkten besitzen. Einen ersten Schritt in Richtung Anschauung unternehmen wir mit dem nächsten Satz, der in der Anschauungsebene offensichtlich gültig ist. Für beliebige normale euklidische Ebenen müssen wir ihn beweisen.

**Satz 7.2** Für alle Punktepaare  $\{A, B\}$  einer normalen euklidischen Ebene gilt  $m_{A,B} \nparallel AB$ .

**Beweis:** Wegen  $A \notin m_{A,B}$  ist  $m_{A,B} \neq AB$ . Sei  $C := \varphi_B(A)$ . Wegen  $A \notin m_{A,C}$  und  $B \in m_{A,C}$  ist  $m_{A,C} \nparallel AB$ . Wir zeigen indirekt  $m_{A,B} \parallel m_{A,C}$  und damit die Behauptung  $AB \nparallel m_{A,B}$ :

Angenommen,  $m_{A,C} \cap m_{A,B} = \{D\}$ . Für kollineare Punkte  $A, C, D$ , also  $D \in (AC = AB)$ , gilt die Behauptung  $AB \nparallel m_{A,B}$ . Für nicht kollineare Punkte  $A, C, D$  bilden diese Punkte zusammen mit  $E := \varphi_B(D)$  das Parallelogramm  $(A, D, C, E)$ .

$$\Rightarrow \{A, E\} \equiv \{C, D\} \equiv \{A, D\} \equiv \{B, D\} \equiv \{B, E\}$$

(Begründung für  $\equiv$  von links nach rechts: Parallelogramm;  $D \in m_{A,C}$ ;  $D \in m_{A,B}$ ; Definition von  $\varphi_B$ )

$\Rightarrow E \in m_{A,B} \Rightarrow m_{A,B} = m_{A,C}$ , Widerspruch.

Wir notieren einige interessante Konsequenzen aus diesem Satz:

**Korollar 1** Zu je zwei Punkten  $A, B$  gibt es genau eine Punktspiegelung  $\varphi$  mit  $\varphi(A) = B$

**Beweis:** Für  $A = B$  ist  $\varphi = \varphi_A$ , für  $A \neq B$  ist  $\varphi = \varphi_M$  mit  $M = AB \cap m_{A,B}$ .

Auf Grund des Korollars können wir jetzt die Mitte einer Strecke definieren:

**Def 7.3** Sei  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ .  $M \in \mathbb{P}$  heißt *Mitte* der Strecke  $\{A, B\}$ :  $\iff \varphi_M(A) = B$

**Korollar 2** Sei  $(A, B, C, D)$  ein Parallelogramm, dann ist  $AC \cap BD$  Mitte von  $\{A, C\}$  und  $\{B, D\}$ .

**Beweis:** Sei  $E$  die Mitte von  $\{A, C\}$ , dann ist  $(A, B, C, \varphi_E(B))$  ein Parallelogramm, das mit dem Parallelogramm  $(A, B, C, D)$  übereinstimmen muss, also  $D = \varphi_E(B) \Rightarrow E$  ist auch Mitte von  $\{B, D\}$ .

**Korollar 3** Jede Kollineation  $\alpha$  ist mittentreu: Die Mitte von  $\{A, B\}$  wird auf die Mitte von  $\{\alpha(A), \alpha(B)\}$  abgebildet.

**Beweis:** Sei  $(A, U, B, V)$  ein Parallelogramm mit Mitte  $M = AB \cap UV$ . Jede Kollineation bildet Parallelogramme auf Parallelogramme ab, also ist  $(\alpha(A), \alpha(U), \alpha(B), \alpha(V))$  ein Parallelogramm mit Mitte  $\alpha(A)\alpha(B) \cap \alpha(U)\alpha(V) = \alpha(M)$ .

Mit dem nächsten Satz stellen wir einen wichtigen Zusammenhang zwischen Punktspiegelungen und Translationen her.

**Satz 7.3** Seien  $\varphi_A$  und  $\varphi_B$  Punktspiegelungen in einer normalen euklidischen Ebene. Dann ist

- a)  $\varphi_A \circ \varphi_B$  eine Translation. Im Fall  $A = B$  ist  $\varphi_A \circ \varphi_B$  die identische Abbildung, im Fall  $A \neq B$  liegt eine Translation in Richtung  $AB$  vor.  
 b) jede Translation die Verkettung zweier Punktspiegelungen.

**Beweis:** a) Die Behauptung gilt für  $A = B$ , weil jede Punktspiegelung selbstinvers ist (Beh. 4 von Satz 7.1). Für  $A \neq B$  ist  $\varphi_A \circ \varphi_B$  eine Dilatation (Begründung: Punktspiegelungen sind Streckungen, Streckungen sind Dilatationen, Dilatationen bilden eine Gruppe).

*Beh.:*  $\varphi_A \circ \varphi_B$  hat keinen Fixpunkt.

*Bew.:* Angenommen,  $(\varphi_A \circ \varphi_B)(X) = X$ . Aus  $\varphi_A^2 = id$  folgt  $\varphi_B(X) = \varphi_A^2(\varphi_B(X)) = \varphi_A((\varphi_A \circ \varphi_B)(X)) = \varphi_A(X)$

Aus Korollar 1 folgt  $\varphi_B = \varphi_A$  und daraus der Widerspruch  $A = B$ . Weil Dilatationen ohne Fixpunkt Translationen sind, ist  $\varphi_A \circ \varphi_B$  als Translation nachgewiesen.

Wegen  $(\varphi_A \circ \varphi_B)(B) = \varphi_A(B) \in AB$  ist  $AB$  die gesuchte Translationsrichtung.

- b) Sei  $\tau$  eine Translation, sei  $X \in \mathbb{P}$  beliebig. Für  $\tau = id$  ist  $\tau = \varphi_X \circ \varphi_X$ , für  $\tau \neq id$  ist  $\{X, \tau(X)\} \in \mathbb{P}_2$ . Nach Korollar 1 existiert eine Punktspiegelung  $\varphi_M$  mit  $\varphi_M(X) = \tau(X)$ .

*Beh.:*  $\tau = \varphi_M \circ \varphi_X$

*Bew.:* Wie in a) bewiesen, ist  $\varphi_M \circ \varphi_X$  eine Translation. Wegen  $(\varphi_M \circ \varphi_X)(X) = \tau(X)$  stimmen diese Translationen nach Satz 5.5 überein.

Damit haben wir gezeigt, dass Translationen ebenfalls Bewegungen sind, und dass man in normalen euklidischen Ebenen zu zwei Punkten  $A, B$  immer eine Translation findet, die  $A$  in  $B$  überführt:

**Korollar** Translationen sind Bewegungen. Jede normale euklidische Ebene ist eine Translationsebene.

Verkettet man zwei Punktspiegelungen, erhält man eine Translation. Was passiert, wenn drei Punktspiegelungen hintereinander ausgeführt werden?

**Satz 7.4** Seien  $A, B, C \in \mathbb{P}$  beliebig.

- a)  $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C$  ist eine Punktspiegelung  
 b)  $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_C \circ \varphi_B \circ \varphi_A$   
 c) Liegen  $A, B, C$  nicht kollinear, ist  $(A, B, C, D)$  ein Parallelogramm mit  $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_D$ .

**Beweis:** a) Wir vergleichen die Punkte  $C$  und  $\varphi_A \circ \varphi_B(C)$ . Im Fall  $C = \varphi_A \circ \varphi_B(C)$  folgt  $\varphi_A = \varphi_B$ . Damit ist  $A = B \Rightarrow \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_C$ .

Im Fall  $C \neq \varphi_A \circ \varphi_B(C)$  sei  $D$  die Mitte von  $\{C, \varphi_A \circ \varphi_B(C)\}$ , also  $\varphi_D(C) = \varphi_A \circ \varphi_B(C)$ . Wegen  $C = \varphi_C(C)$  folgt  $\varphi_A \circ \varphi_B(C) = \varphi_D(C) = \varphi_D \circ \varphi_C(C)$ .

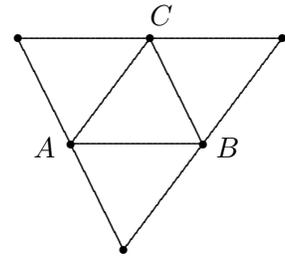
Nach Satz 7.3 sind  $\varphi_A \circ \varphi_B$  und  $\varphi_D \circ \varphi_C$  Translationen, die nach Satz 5.5 übereinstimmen:

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_D \circ \varphi_C \iff \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C^{-1} = \varphi_D \iff \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_D$$

- b) Weil jede Punktspiegelung selbstinvers ist, folgt  $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = (\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C)^{-1} = \varphi_C^{-1} \circ \varphi_B^{-1} \circ \varphi_A^{-1} = \varphi_C \circ \varphi_B \circ \varphi_A$ .

c)  $A, B, C$  nicht kollinear  $\Rightarrow A \neq B \Rightarrow \varphi_A \varphi_B$  Translation in Richtung  $AB$ . Wegen  $\varphi_A \varphi_B = \varphi_D \varphi_C$  ist auch  $\varphi_D \varphi_C$  eine Translation in gleicher Richtung, es folgt  $AB \parallel CD$ . Analog folgt aus  $\varphi_B \varphi_C = \varphi_A \varphi_D$  die Parallelität von  $BC$  und  $AD$ .

*Frage:* Welcher der in der Zeichnung nicht benannten Punkte ist  $D$  mit  $\varphi_D = \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C$ ? Welche Bedeutung haben die beiden anderen Punkte?



## 8 Orthogonalität

Nachdem wir im vorherigen Paragraphen den Begriff Mitte geklärt haben, wenden wir uns jetzt der zweiten Worthälfte von *Mittelsenkrechte* zu. Wir befinden uns weiterhin in normalen euklidischen Ebenen.

**Def 8.1** Eine Gerade  $g$  heißt *orthogonal* oder *senkrecht* zu einer Geraden  $h$ , geschrieben  $g \perp h$ , :  $\iff h = m_{A,B}$  mit geeigneten Punkten  $A, B \in g$ .

Man beachte, dass wir zur Definition von orthogonal keine Winkel benutzt haben!

*Beispiel:* In der Anschauungsebene ist  $g_0 \perp g_{0,1}$ ; denn wegen  $A = (0,0)$  und  $B = (0,2) \in g_0$  gilt  $m_{A,B} = g_{0,1}$ .

*Frage:* Gilt auch  $g_{0,1} \perp g_0$ ?

Die Antwort auf die letzte Frage lässt sich verallgemeinern:

**Satz 8.1** Seien  $g$  und  $h$  Geraden einer normalen euklidischen Ebene. Dann gilt  $g \perp h \iff h \perp g$ .

**Beweis:** Es ist nur „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen: Gesucht sind  $X, Y \in h$  mit  $g = m_{X,Y}$ .

Aus der Voraussetzung  $g \perp h$  folgt die Existenz zweier Punkte  $A, B \in g$  mit  $h = m_{A,B}$ . Nach Satz 7.2 ist  $m_{A,B} \nparallel (AB = g)$ , sei  $M = g \cap h$ . Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte, sei  $C \in h$  ein weiterer Punkt. Wir nutzen verschiedene Eigenschaften der Punktspiegelung  $\varphi_M$  und die Distanztreue der Relation  $\equiv$  aus:

$$\{A, \varphi_M(C)\} = \{\varphi_M(B), \varphi_M(C)\} \equiv \{B, C\} \equiv \{A, C\} \equiv \{\varphi_M(A), \varphi_M(C)\} = \{B, \varphi_M(C)\}$$

$A$  und  $B$  liegen auf  $m_{C, \varphi_M(C)}$ , dies bedeutet  $(AB = g) = m_{C, \varphi_M(C)}$ . Wegen  $C, \varphi_M(C) \in h$  sind  $X = C$  und  $Y = \varphi_M(C)$  die gesuchten Punkte!

Wir haben soeben bewiesen, dass die Relation  $\perp$  symmetrisch auf der Menge der Geraden ist. Ob sie auch reflexiv und transitiv ist, werden wir eventuell in den Übungen untersuchen.

Auf Grund von Satz 6.2 wissen wir, dass jede Bewegung (dort Isomorphismus genannt) Mittelsenkrechte auf Mittelsenkrechte, Kreise auf Kreise und Parallelogramme auf Parallelogramme abbildet. Jetzt lernen wir eine weitere Eigenschaft dieser „gutartigen“ Abbildungen kennen:

**Satz 8.2** Bewegungen erhalten Orthogonalität.

**Beweis:** Sei  $\alpha$  eine Bewegung und sei  $g \perp h$ . Nach Definition ist  $h = m_{A,B}$  mit geeigneten Punkten  $A, B \in g$ . Es folgt  $\alpha(A), \alpha(B) \in \alpha(g)$ , ferner ist nach Satz 6.2  $m_{\alpha(A), \alpha(B)} = \alpha(m_{A,B}) = \alpha(h)$ , womit die Behauptung  $\alpha(g) \perp \alpha(h)$  bewiesen ist.

Wir vergleichen  $\parallel$  und  $\perp$ ; bekanntlich ist  $g \perp h \Rightarrow g \nparallel h$  (warum?).

**Satz 8.3** Seien  $g, h, h' \in \mathbb{G}$ ,  $g \perp h$ . Dann gilt  $h \parallel h' \iff g \perp h'$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $M = g \cap h$ , aus  $h' \parallel h \nparallel g$  folgt  $g \cap h' = M'$ . Weil für  $M = M'$  wegen  $h = h'$  nichts mehr zu zeigen ist, können wir von  $M \neq M'$  ausgehen.

Jede normale euklidische Ebene ist eine Translationsebene (Korollar zu Satz 7.3). Also gibt es eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(M) = M'$ . Weil  $\tau$  gleichzeitig eine Bewegung ist, folgt aus Satz 8.2  $\tau(g) \perp \tau(h)$ . Hierbei ist  $\tau(g) = \tau(MM') = g$  und  $\tau(h) = (\tau(M), h) = h'$ , was zu zeigen war.

„ $\Leftarrow$ “: Zu zeigen ist  $g \perp h, g \perp h' \Rightarrow h \parallel h'$ . Erneut sei  $M = g \cap h$ . Wir setzen  $k := (M, h')$ . Wegen  $k \parallel h'$  folgt aus der vorher bewiesenen Richtung „ $\Rightarrow$ “  $g \perp k$ . Zu zeigen ist somit  $k = h$ .

Sei  $A \in g \setminus \{M\}$ . Wir bilden  $\varphi_M(A) \in g$  und stellen fest:

Wegen  $g \perp h$  ist  $h = m_{A, \varphi(A)}$ , wegen  $g \perp k$  ist  $k = m_{A, \varphi(A)}$ , also gilt  $h = k$ .

Alle zu einer Geraden orthogonale Geraden liegen demnach in einem Parallelbüschel. Etwas allgemeiner gilt sogar

**Korollar** Seien  $g, g', h, h' \in \mathbb{G}$ ,  $g \perp h, g \parallel g'$ . Dann ist  $h \parallel h' \iff g' \perp h'$ .

Den einfachen kurzen Beweis möge man als Übung selbst erledigen.

Jetzt können wir uns mit einigen elementaren geometrischen Begriffen beschäftigen, die in der Schule aus der Anschauungsebene bekannt sein sollten.

**Satz 8.4** (Fällen von Loten)

In jeder normalen euklidischen Ebene kann zu jeder Geraden durch jeden Punkt das *Lot gefällt* werden:

$$\forall g \in \mathbb{G}, \forall P \in \mathbb{P} \quad \exists_1 l \in \mathbb{G} : P \in l \wedge l \perp g$$

**Beweis:** Zu  $A, B \in g$ ,  $A \neq B$ , existiert stets die Mittelsenkrechte  $m_{A,B} \perp g$ , die Gerade  $l := (P, m_{A,B})$  ist wegen Satz 8.3 das gesuchte Lot.

*Frage:* Wie konstruiert man Lote in der Anschauungsebene?

Das Lot  $l$  durch  $A$  zu einer Geraden  $g$  schreiben wir auch  $l = (A \perp g)$ . Im Folgenden werden drei nicht kollineare Punkte  $A, B, C$  als *Dreieck*  $ABC$  bezeichnet.

**Satz 8.5** (Umkreis eines Dreiecks)

In jedem Dreieck  $ABC$  schneiden sich die Mittelsenkrechten  $m_{A,B}$ ,  $m_{A,C}$ ,  $m_{B,C}$  in einem Punkt  $M$ .  $M$  ist der Mittelpunkt des *Umkreises*  $k$  von  $ABC$ , d.h.,  $k = k_M(A) = k_M(B) = k_M(C)$ .

**Beweis:** Aus  $AB \perp m_{A,B}$ ,  $AC \perp m_{A,C}$  und  $AB \nparallel AC$  folgt aus dem letzten Korollar die Existenz von  $M := m_{A,B} \cap m_{A,C}$ .

$$\Rightarrow \{B, M\} \equiv \{A, M\} \equiv \{C, M\} \Rightarrow M \in m_{B,C} \text{ und } A, B, C \in k_M(A) \cap k_M(B) \cap k_M(C).$$

**Def 8.2** In jedem Dreieck  $ABC$  heißt das Lot  $h_A := (A \perp BC)$  die *Höhe* auf  $BC$  durch  $A$ .

Analog sind  $h_B = (B \perp AC)$  und  $h_C = (C \perp AB)$  die anderen Höhen des Dreiecks  $ABC$ .

**Satz 8.6** (Höhenschnittpunkt eines Dreiecks)

In jedem Dreieck  $ABC$  schneiden sich die Höhen  $h_A, h_B, h_C$  in einem Punkt  $H$ .

**Beweis:** Wir ergänzen  $ABC$  zu Parallelogrammen  $(A, B, C, B')$ ,  $(C, A, B, A')$ ,  $(B, C, A, C')$  und erhalten

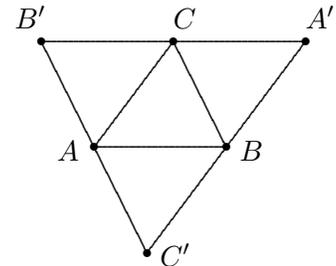
$$\{A, B'\} \equiv \{B, C\} \equiv \{A, C'\}, \quad \{B, C'\} \equiv \{A, C\} \equiv \{A', B\},$$

$$\{A', C\} \equiv \{A, B\} \equiv \{B', C\}.$$

Damit ist  $A \in m_{B',C'}$ ,  $B \in m_{A',C'}$ ,  $C \in m_{A',B'}$ .

Wegen  $h_A \perp BC$  und  $BC \parallel B'C'$  ist  $h_A \perp B'C' \Rightarrow h_A = m_{B',C'}$ .

Weil analog  $h_B = m_{A',C'}$  und  $h_C = m_{A',B'}$  gilt, folgt die Behauptung aus Satz 8.5.



**Satz 8.7** In einem Dreieck  $ABC$  sei  $M$  die Mitte von  $\{A, B\}$  und  $M'$  die Mitte von  $\{A, C\}$ . Dann ist  $MM' \parallel BC$ .

**Beweis:** Es ist  $A = \varphi_M(B)$ ,  $C = \varphi_{M'}(A)$ , wegen  $B \neq C$  ist  $M \neq M'$ . Nach Satz 7.3 ist  $\varphi_{M'} \circ \varphi_M$  eine Translation  $\tau$  in Richtung  $MM'$ . Wegen  $\tau(B) = \varphi_{M'}(\varphi_M(B)) = \varphi_{M'}(A) = C$  ist  $BC = B\tau(B) \parallel MM'$ .

**Def 8.3** Sei  $M$  die Mitte von  $\{A, B\}$ . Dann heißt  $k_M(A) = k_M(B)$  *Thaleskreis* über  $AB$ , geschrieben  $k(A, B)$ .

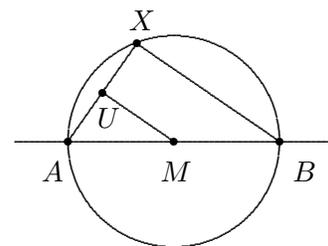
Aus der Schulzeit erinnert man sich vielleicht noch, dass der Thaleskreis etwas mit rechten Winkeln zu tun hat. Wir haben in dieser Vorlesung zwar bisher keine Winkel eingeführt, wissen aber, was senkrecht bedeutet.

**Satz 8.8** Sei  $X \neq A, B \in \mathbb{P}$ . Dann gilt  $X \in k(A, B) \iff AX \perp BX$

**Beweis:** Für  $X \neq A$  sei  $U$  die Mitte von  $\{A, X\}$ . Wenn wir die Mitte von  $\{A, B\}$  mit  $M$  bezeichnen, ist nach Definition des Thaleskreis  $k(A, B) = k_M(A)$ . Damit ist

$$X \in k(A, B) \iff \{A, M\} \equiv \{X, M\} \iff UM = m_{A,X}$$

„ $\Rightarrow$ “: Weil  $ABX$  ein Dreieck mit Mitten  $M$  und  $U$  ist, folgt aus Satz 8.7  $UM \parallel BX$ . Aus Satz 8.3 folgt dann  $AX \perp BX$ .



„ $\Leftarrow$ “: Sei  $AX \perp BX$ . Erneut ergibt Satz 8.7  $UM \parallel BX$ , zusammen mit Satz 8.3 erhalten wir diesmal  $AX \perp UM$ , d.h.  $UM = m_{A,X}$ .