

## Seminar zur Mathematischen Physik: Supergeometrie

(An English version of this document will be available upon request.)

### Ziel des Seminars

Supergeometrie ist eine Erweiterung der kommutativen Geometrie, in der neben kommutierenden auch antikommutierende Funktionen und Koordinaten zugelassen werden. Sie spielt eine große Rolle in der Physik und in vielen aus der Physik stammenden mathematischen Problemen, etwa der elliptischen Kohomologie oder der Spiegelsymmetrie.

Ziel des Seminars ist es, eine Einführung in die Supergeometrie zu geben. Diskutiert werden zunächst die algebraischen Grundlagen (superkommutative Algebren und ihre Moduln, Lie-Superalgebren). Nach einer kurzen Einführung in die Garbentheorie wenden wir uns der Untersuchung von Supermannigfaltigkeiten zu. Schließlich wird Zeit bleiben, einen Einblick in Themen zu gewinnen, die für die aktuelle Forschung relevant sind, z.B. Supergruppen, Räume von Abbildungen zwischen Supermannigfaltigkeiten und die Verwendung der Supergeometrie in der Physik.

### Voraussetzungen

Das Seminar richtet sich an Studierende des Bachelorstudiengangs Mathematik und der Master-Studiengänge Mathematik und Mathematische Physik und Physik. Nötige Voraussetzungen sind die Vorlesungen Lineare Algebra I und II, sowie eine Vertrautheit mit den Grundideen der Geometrie, z.B. aus der Vorlesung Differentialgeometrie I oder einer Vorlesung über Allgemeine Relativitätstheorie.

Für einen Vortrag auf Master-Niveau muss ein Thema gewählt werden, das mit einem Stern gekennzeichnet ist. Diese Themen sollten auch für Bachelor-Studierende zu bewältigen sein. Im Anschluss an einen Vortrag mit Stern kann ein Thema für eine Bachelor-Arbeit besprochen werden.

Themen, die mit einem (P) gekennzeichnet sind, haben einen Bezug zur mathematischen Physik.

### Vortrag 1: Lineare und kommutative Superalgebra

Erläutern Sie die Grundkonzepte der Superalgebra: Supervektorräume, Superalgebren über einem Körper, Moduln über Superalgebren, graduiert lineare Abbildungen, das Konzept der Superkommutativität. Gehen Sie insbesondere auf freie Moduln über superkommutativen Algebren ein und führen Sie die Superspur ein. Diskutieren Sie die Invertierbarkeit von Elementen einer superkommutativen Algebra und führen Sie die allgemeine lineare Supergruppe und die Superdeterminante ein.

[B, Abs. 1.1]

## **Vortrag 2: Die allgemeine lineare Gruppe und die Superdeterminante**

In diesem Vortrag soll, nach einer kurzen Diskussion der Invertierbarkeit in Superalgebren die allgemeine lineare Gruppe eines freien Moduls über einer kommutativen Superalgebra eingeführt werden. In einem zweiten Schritt geben Sie die Definition der Berezin-Determinante an und motivieren diese, indem Sie ihre wesentlichen Eigenschaften erläutern: Multiplikativität und Zusammenhang mit der Superspur. Ziel ist es, Satz 2.27 aus [CdG] wenigstens zu skizzieren.

[B, Abs. 1.1, CdG, Abs. 2.2, pp. 55-63]

## **Vortrag 3: Einführung in die Garbentheorie**

Führen Sie das Konzept einer Prägarbe und einer Garbe auf einem topologischen Raum ein. Erklären Sie, was die Halme einer Garbe sind und führen Sie Homomorphismen von Garben ein. Geben Sie dann die Definition eines geringten Raums und eines lokal geringten Raums. Besprechen Sie dann das Konzept der Bildgarbe und des Garbenmorphismus. Schließen Sie mit der Definition eines Morphismus von  $\mathbb{K}$ -geringten Räumen und erwähnen Sie Lemma 1.2.16 aus [B].

[B, Abs. 2.3]

## **Vortrag 4: Supermannigfaltigkeiten, Teil 1**

Führen Sie Supergebiete ein wie in [B, Abs. 1.3] und zeigen Sie, dass diese lokal geringte Räume sind. Gehen Sie dann zu Supermannigfaltigkeiten und ihren Morphismen über und diskutieren Sie die Beispiele in [B, Abs. 1.3]. Ziel des Vortrags ist es, Satz 1.3.14 aus [B] möglichst detailliert zu diskutieren.

[B, Abs. 1.3]

## **Vortrag 5: Supermannigfaltigkeiten, Teil 2**

Ziel ist es, Satz 1.3.16 aus [B] zu beweisen und die daraus folgenden Konsequenzen zu erläutern, insb. Korollar 1.3.17. Führen Sie das Konzept des Funktionenfaktors ein.

[B, Abs. 1.3]

## **Vortrag 6: Koordinatensysteme auf Supermannigfaltigkeiten**

Das Ziel dieses Vortrags ist es, den Satz 4.27 aus [CdG] zu beweisen und zu motivieren. Dazu benutzen Sie den im vorhergehenden Vortrag eingeführten Begriff des Funktionenfaktors und Satz 1.3.16 aus [B]. Stellen Sie die weiteren nötigen Vorarbeiten aus [CdG, Abs. 4.3] vor.

[CdG, Abs. 4.3]

## **Vortrag 7: Der Satz von Batchelor**

Beweisen Sie Satz 1.4.1 aus [B]. Erläutern Sie auch die Bedeutung von Bemerkung 1.4.2.

[B, Abs. 1.4] und [CdG, Abs. 4.4]

## **Vortrag 8: Vektorfelder**

Führen Sie die Garbe der (Super-)Vektorfelder auf einer Supermannigfaltigkeit ein wie in [B, Abs. 1.5]. Definieren Sie dann die Jacobi-Matrix eines Morphismus von Supermannigfaltigkeiten und zeigen Sie, dass auch hier die Kettenregel gilt.

[B, Abs. 1.5, 1.6] und [CdG, Abs. 4.5]

### **Vortrag 9: Der Umkehrsatz\***

Erklären und beweisen Sie den Umkehrsatz für Supermannigfaltigkeiten (Satz 1.6.5 in [B] und Satz 5.13 in [CdG]). Der vollständige Beweis findet sich in [CdG, Abs. 5.2]. Erwähnen Sie am Schluss insbesondere auch Korollar 5.14 aus [CdG] und weitere Folgerungen, die man klassisch aus dem Umkehrsatz gewinnt (ohne Beweis).

[B, Abs. 1.6], [CdG Abs. 5.2]

### **Vortrag 10: Supersymmetrische Mechanik von Punktteilchen[P]**

Erklären Sie die supergeometrische Beschreibung eines klassischen Punktteilchens mit Spin wie in [B, Abs. 1.7] oder [CdG, Abs. 6.1].

[B, Abs. 1.7], [CdG, Abs. 6.1]

### **Vortrag 11: Berezin-Integration\***

Führen Sie das Berezin-Linienbündel ein wie in [CdG, Abs. 5.3] und damit den Begriff der Supervolumenform. Erläutern Sie die Bedeutung des Transformationsatzes (Satz 5.34 in [CdG]) und gehen Sie, soweit Zeit ist, auf dessen Beweis ein.

[CdG, Abs. 5.3], [B, Abs. 1.8]

### **Vortrag 12: Super-Poincaré-Algebren und Superfelder[P]**

Erläutern Sie die Grundlagen des Superfeld-Formalismus in der Physik: Super-Poincaré-Algebren, Multiplettss, chirale Felder, Eich-Superfelder.

### **Referenzen:**

[B] C. Bär, *Nichtkommutative Geometrie (Skript)*, verfügbar unter

<http://geometrie.math.uni-potsdam.de/documents/baer/skripte/skript-NKommGeo.pdf>

[CdG] Constantinescu, F. und de Groote, H.F., *Geometrische und algebraische Methoden der Physik: Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren*, Teubner Studienbücher, Teubner 1994

[DM] Deligne, P. und Morgan, J.W., *Notes on Supersymmetry (following Joseph Bernstein)*, in: *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, AMS 1998

## Organisatorische Hinweise

- Ort und Zeit: Mi 14-16 Uhr, Raum 432.
- Anmeldung per E-Mail an [chsachse@gmail.com](mailto:chsachse@gmail.com) oder in der ersten Sitzung.
- Scheinkriterium ist ein Seminarvortrag mit Handout.
- Der Vortrag darf nicht die Dauer von 75 Minuten überschreiten, damit Zeit für Diskussion und zusammenfassende und erweiternde Kommentare bleibt.
- Das Handout und ein (möglicherweise handschriftliches) Vortragsskript muss spätestens 10 Tage vor dem geplanten Vortragstermin bei mir (Zimmer 318) abgegeben werden. Falls Sie mich nicht antreffen, kontaktieren Sie mich bitte per E-Mail (Adresse s.o.).
- Bitte kommen Sie ca. zwei Tage nach Abgabe des Skripts in meine Sprechstunde, damit ich Ihnen rechtzeitig noch Hinweise zum Vortrag geben kann.
- Das Handout sollte die wichtigsten Aussagen zusammenfassen und die Struktur der vorgestellten Theorie prägnant darstellen. Es ist kein Ersatz-Lehrbuch und muss auch kürzer als Ihr eigenes Vortragsskript sein. Zwei Seiten in Standard-LaTeX reichen für ein Handout.
- Sie müssen nicht selbst Kopien des Handouts machen. Es reicht aus, mir die TeX Datei (ersatzweise postscript und/oder pdf) zu schicken. Diese wird dann auf der Webseite zum Seminar zum Herunterladen bereitgehalten.