

Diplomarbeit zum Thema

Modellierung und Simulation von Gasdynamik in einem Auspuffrohr

von
Martin Rybicki

betreut durch
Prof. Dr. Ingenuin Gasser

Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik

Hamburg, 4. September 2010

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebene Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Hamburg, 4. September 2010

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Anwendungsbezogener Hintergrund	3
2.1. Funktionsweise eines Verbrennungsmotors	3
2.2. Bestandteile eines Auspuffrohrs	4
3. Modellierung	9
3.1. Geometrie des Auspuffrohrs	10
3.2. Herleitung der eindimensionalen Modellgleichungen	12
3.2.1. Massenerhaltung	13
3.2.2. Die Reaktionsgleichung	14
3.2.3. Impulsbilanz	15
3.2.4. Energiebilanz	18
3.3. Die Modellgleichungen	20
3.4. Skalierung	21
3.5. Machzahl-Asymptotik	24
3.6. Anfangs- und Randbedingungen	27
3.7. Umformulierung des Modells	28
3.8. Stationäre Lösungen	32
3.8.1. Stationäre Lösung mit Katalysatorreibung	36
4. Numerik und Simulationsergebnisse	39
4.1. Numerik	39
4.1.1. Numerische Verfahren	39
4.1.2. Numerische Behandlung der Gleichungen	41
4.2. Simulationsreihen	42
4.2.1. Simulationsreihe I: Nur mit Wandreibung	44
4.2.2. Simulationsreihe II: Randdruck p^l	47
4.2.3. Simulationsreihe III: Katalysator-Reibungskoeffizient C	49
4.2.4. Simulationsreihe IV: Wärmedurchgangskoeffizient h	51
4.2.5. Simulationsreihe V: Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0	57
4.2.6. Simulationsreihe VI: Wärmefreisetzungsrate q_0	64
4.3. Vergleich mit dem Modell von LACOSTE und NATALINI	69
5. Abschlussbetrachtung	75
A. Anhang	87
A.1. Dynamische Viskosität	87
A.2. Programm Informationen	87

A.3. Der Term $A_x p$ in der Impulsbilanz	88
---	----

1. Einleitung

Um die durch Straßenfahrzeuge verursachte Umweltbelastung zu begrenzen, werden durch den Gesetzgeber Anforderungen an die Schadstoffemissionen von Kraftfahrzeugen gestellt. Bereits Anfang der 1960er Jahre wurden in Kalifornien (USA) die ersten Abgasnormen für den Straßenverkehr beschlossen. Die Europäische Gemeinschaft beschloss 1970 die ersten einheitlichen Abgasvorschriften. Seitdem folgte eine Vielzahl von neuen Gesetzesentwürfen zur Kontrolle der Abgasemissionen. Die aktuelle Abgasnorm *Euro-5* gilt seit dem 1. September 2009 - schärfere Verordnungen sind bereits beschlossen und sollen mit dem *Euro-6*-Gesetz zum 1. September 2014 eintreten¹.

Thema dieser Diplomarbeit ist es ein Modell für die Abgasströmung im Auspuffrohr eines Pkw-Fahrzeuges aufzustellen und numerisch zu simulieren. Die Untersuchung des Modells findet hinsichtlich des Kaltstarts des Fahrzeuges und der anschließenden Erwärmung des Katalysators statt, da zu Beginn die Temperatur des Katalysators nicht ausreicht, um die Umwandlung der schädlichen Abgasprodukte in weniger schädliche in einem gewünschten Ausmaß sicherzustellen. Dabei soll eine spezielle Methode zur Aufheizung betrachtet werden, nämlich jene in der eine Restmenge Kraftstoff im Katalysator verbrannt wird.

Als Grundlage für die Diplomarbeit dient ein wissenschaftlicher Report von LAURE LACOSTE, der unter der Betreuung von PROF. DR. ROBERTO NATALINI im Jahr 2004 angefertigt wurde. Außerdem wird für einige Daten die Diplomarbeit von ROBERTA PETRUCCI unter Betreuung von PROF. RENATO SPIGLER, welche die Arbeit von LACOSTE und NATALINI aufgreift, herangezogen.

In Kapitel 2 stellen wir zunächst die Funktionsweise und die Bestandteile eines Verbrennungsmotors und eines Auspuffrohres dar. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den Katalysatoren und deren physikalische Bedeutung für unser mathematisches Modell zur Beschreibung der Gassströmung durch das Auspuffrohr.

Anschließend wird in Kapitel 3 das Modell hergeleitet. Es handelt sich dabei um eindimensionale kompressiblen Eulergleichungen mit rechten Seiten, die für die verschiedenen, in unserer Betrachtung auftretenden Phänomene stehen. Dieses Modell, welches in der Arbeit von LACOSTE und NATALINI numerisch untersucht wurde, wird skaliert um zu erkennen, ob gewisse Kenngrößen - in unserem Fall wird es die *Machzahl* sein - eine Größenordnung aufweisen, die eine asymptotische Betrachtung des Modells rechtfertigen können. Ein weiterer zentraler Unterschied zum Modell von LACOSTE und NATALINI wird außerdem die andere Wahl von Randbedingungen sein. Das nach der Asymptotik hergeleitete Modell wird hinsichtlich der Kompatibilität mit den neuen Randdaten umformuliert werden müssen. Da die Analysis von *hyperbolischen Bilanzgleichungen* beziehungsweise *nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen* äußerst schwierig ist, werden in diesem Kapitel nur einige spezielle stationäre Lösungen des Grenzmodells untersucht.

¹Quelle: http://europa.eu/legislation_summaries/environment/air_pollution/128186_de.htm

Die numerische Untersuchung der Modellgleichungen findet im Kapitel 4 statt. Grundlage für das numerische Verfahren sind *Finite Differenzen Verfahren*. Die Simulationsergebnisse werden erläutert und auf qualitative und quantitative Unterschiede beziehungsweise Gemeinsamkeiten mit dem Modell von LACOSTE und NATALINI untersucht.

Anschließend finden im Kapitel 5 eine Abschlussbetrachtung und ein kurzer Ausblick statt.

2. Anwendungsbezogener Hintergrund

Dieses Kapitel dient dem anwendungsbezogenem Verständnis des Problems. Es werden kurz die Funktionsweise eines Motor und die Bestandteile eines Auspuffrohres erläutert. Das Hauptaugenmerk gilt dabei dem Katalysator, dessen physikalische Wirkung auf die durch das Auspuffrohr strömenden Abgase bei der Modellierung Berücksichtigung finden muss.

2.1. Funktionsweise eines Verbrennungsmotors

In einem Verbrennungsmotor wird durch die Verbrennung eines zündfähigen Luft-Kraftstoff-Gemisches chemische Energie in mechanische umgewandelt. Zu diesem Zweck finden im Motor vier Schritte statt. Zur Verdeutlichung dieser Arbeitsschritte empfiehlt sich die Betrachtung der Abbildung 2.1, die skizzenhaft den groben Aufbau eines Verbrennungsmotors aufzeigt.

1. Ansaugen

Das Einlassventil wird geöffnet und der Kolben fährt nach unten. Durch den erzeugten Unterdruck wird das Luft-Kraftstoff-Gemisch durch das Einlassventil eingesaugt.

2. Verdichten

Ist der Kolben am unteren Punkt angelangt, wird das Einlassventil wieder geschlossen. Der Kolben bewegt sich nach oben und verdichtet das Gemisch.

3. Verbrennen

Kurz bevor der Kolben den oberen Totpunkt erreicht, wird das Luft-Kraftstoff-Gemisch mit Hilfe einer Zündkerze gezündet. Durch die Explosion kommt es zu einen großen Temperatur- und Druckanstieg. Letzter ist dafür verantwortlichen, dass der Kolben wieder nach unten gedrückt wird.

4. Ausstoßen

Ist der Kolben am unteren Totpunkt angelangt, wird das Auslassverntil geöffnet. Der sich wieder nach oben bewegende Kolben drückt das verbrannte Luft-Kraftstoff-Gemisch aus dem Verbrennungsraum in den Auspuff.

Wegen der vier verschiedenen Arbeitsschritte, die ein soeben beschriebener Motor leistet, wird er auch *Vier-Takt-Motor* genannt. Die mechanische Energie, welche für die Arbeitsschritte Ansaugen, Verdichten und Ausstoßen verantwortlich ist, wird von der Kurbelwelle geliefert. Aufgeladen wird die Kurbelwelle durch die Verbrennung des Luft-Kraftstoff-Gemisches.

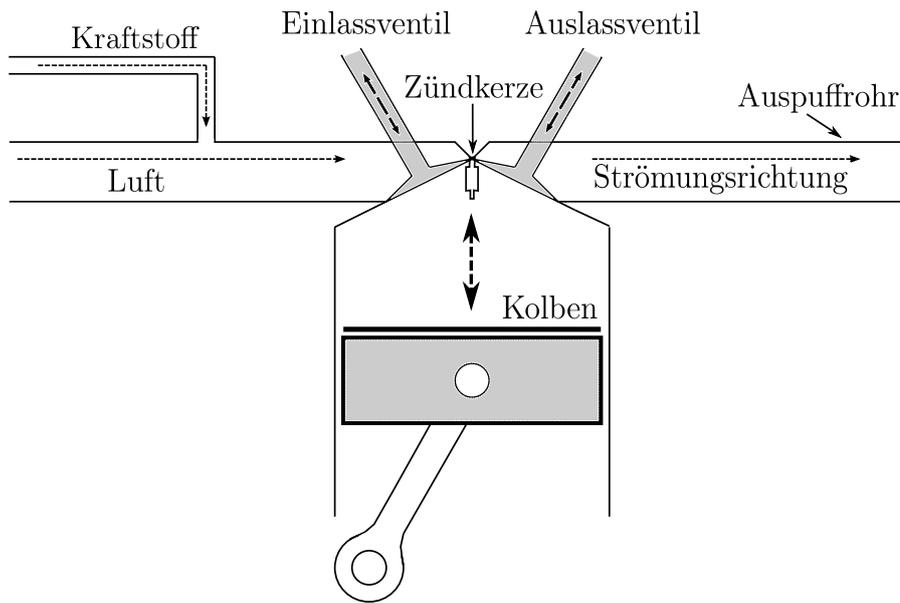


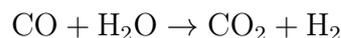
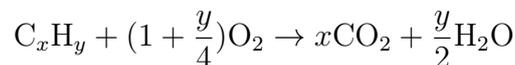
Abbildung 2.1.: Verbrennungsmotor

2.2. Bestandteile eines Auspuffrohrs

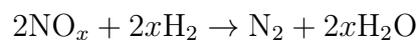
Katalysatoren

Nach der Verbrennung des Luft-Kraftstoff-Gemisches werden die Produkte der exothermen Reaktion aus dem Motor ausgestoßen und durch den Auspuff abgeleitet. Da bei der Verbrennung des Kraftstoffs giftige Gase, wie zum Beispiel Kohlenmonoxid (CO), Kohlenwasserstoffe (C_xH_y) oder Stickstoffoxide (NO_x) entstehen, möchte man die Abgase nicht direkt an die Umwelt abgeben. Zuvor sollen die schädlichen Stoffe in "unschädliche" umgewandelt werden. Damit diese chemische Umwandlung in einem ausreichendem Maße stattfindet, bedarf es im Auspuffrohr der Hilfe eines *Katalysators*¹. Der Katalysator setzt für diese Umwandlung die Aktivierungsenergie E^+ herab, indem er einen alternativen Reaktionsweg eröffnet. Dadurch können Reaktionen in Anwesenheit eines Katalysator stattfinden, die unter den gleichen Bedingungen ohne Katalysator nicht stattgefunden hätten.

- Oxidation von CO und C_xH_y zu CO_2 und H_2O



- Reduktion von NO_x zu N_2



¹Als Katalysator bezeichnet man eine Substanz, deren Anwesenheit eine Reaktion beschleunigt, ohne selbst Teil dieser Reaktion zu sein.

Ein Katalysator der die obigen Reaktionen beschleunigt und typisch für Pkw-Fahrzeuge ist, besteht in der Regel aus mehreren Bestandteilen. Als Träger dient ein wabenförmiger Körper aus Keramik, dessen Kanäle mit reaktionsbeschleunigenden Edelmetallen beschichtet werden - dem sogenannten *Washcoat*. Dieser Washcoat besteht bei modernen Fahrzeugkatalysatoren unter anderem aus den Edelmetallen Platin (Pt), Palladium (Pd) und Rhodium (Rh). Die Oxidationen und Reduktionen von Kohlenstoffmonoxid und Kohlenwasserstoff beziehungsweise Stickstoffoxid finden an der Oberfläche dieser Edelmetalle statt. Daher ist es wichtig, dass der Katalysator eine möglichst große geometrische Oberfläche bereitstellt. Dies wird gerade durch die Wabenstruktur des Keramikblocks und die damit verbundenen vielen Kanäle geschaffen. Durch die Feinheit der Wabenstruktur wird in einem gängigen Fahrzeugkatalysator eine Reaktionsoberfläche von bis zu Hundert Quadratmetern geschaffen. Die Struktur des Keramikblocks führt zu einer verstärkten Reibung, die das Gasgemisch zusätzlich zu der Rohrwandreibung in den Katalysatoren erfährt.

Entscheidend für den Ablauf der Umwandlung der schädlichen Abgase in "unschädliche" ist die sogenannte *Anspringtontemperatur* (engl. *Light Off*). Gemeint ist damit die Temperatur bei der die Umwandlung im Katalysator in einem gewünschten Ausmaß stattfindet. Zwar senkt der Katalysator die benötigte Aktivierungstemperatur auf etwa 250 - 300°C ab, doch auch diese muss zunächst erreicht werden, damit die Reaktion in einem ausreichendem Maße abläuft. Dies ist insbesondere zu Beginn des Fahrzeugbetriebs nicht unproblematisch. Eine elektrische Heizung für den Katalysator ist hinsichtlich der geringen Bordnetzspannung von 12V keine praktische Maßnahme. Eine bessere und in der Praxis häufig angewandte Alternative ist es, einen Teil des Kraftstoffes im Katalysator verbrennen zu lassen. Dies wird realisiert, indem man die Kraftstoffmenge vor der Einspritzung in den Motor anteilig höher wählt, so dass die Menge an Sauerstoff die sich im Motor befindet, nicht ausreicht, um den Kraftstoff vollständig verbrennen zu lassen. Wie viel Kraftstoff beziehungsweise Sauerstoff sich in dem Verbrennungsraum des Motors befindet, wird durch das sogenannte *Lambda-Verhältnis* (λ) angegeben. Dabei drückt λ das Verhältnis von der tatsächlich vorhandenen Luftmenge m_{Luft} zur idealerweise *stöchiometrisch*² benötigten Menge $m_{\text{Luft}}^{\text{st}}$ aus.

$$\lambda = \frac{m_{\text{Luft}}}{m_{\text{Luft}}^{\text{st}}}$$

Bei einem Wert $\lambda < 1$, wäre die Menge Luft für eine vollständige Verbrennung zu gering und es würde eine Restmenge an Kraftstoff vom Motor in den Auspuff ausgestoßen werden. Im Katalysator könnte die Restmenge Kraftstoff mit dort befindlichem Sauerstoff exotherm reagieren und somit den Katalysator auf Betriebstemperatur bringen. Tatsächlich ist es unter anderem aus diesem Grund üblich, dass Motoren von Fahrzeugen bei einem Kaltstart mit einem *fetten* Gemisch - d.h. $\lambda < 1$ - betrieben werden. Bleibt noch die Frage:

²Das stöchiometrische Verhältnis von Luft zu Kraftstoff, ist das Mengenverhältnis bei dem das Luft-Kraftstoff-Gemisch vollständig verbrennt und weder Kraftstoff noch Luft nach der Reaktion im unverbrannten Zustand übrig bleibt. Das stöchiometrische Verhältnis für die in einem Fahrzeugmotor stattfindende Reaktion liegt bei 14,7kg Luft zu 1kg Kraftstoff.

Woher kommt der Sauerstoff für die Oxidationen im Katalysator?

Sowohl die Oxidationen von CO und C_xH_y , als auch die Verbrennung von Kraftstoff benötigen Sauerstoff. Dieser wird durch zwei Quellen bereitgestellt.

1. Das chemische Element *Cer* (Ce) ist in der Lage einen Sauerstoffüberschuss abzuspeichern, indem es mit ihm eine chemische Bindung eingeht. Herrscht ein Sauerstoffmangel, gibt das Cer die Verbindung mit dem Sauerstoff zu Gunsten der anderen Edukte auf. Die Sauerstoffmenge, die somit gespeichert wird, reicht im Allgemeinen nicht für die zusätzliche exotherme Reaktion des Kraftstoffes aus. Vielmehr ist sie dafür gedacht, um Sauerstoff für die Oxidationen der Schadstoffe bereitzustellen. Dies funktioniert, da man es nicht schafft im Betrieb stets ein stöchiometrisches Luft-Kraftstoff Verhältnis zu haben. In der Regel schwankt λ zwischen Werten kleiner und größer als Eins - mal gibt es Sauerstoffmangel und mal einen -überschuss, der den Katalysator erreicht. Das Cer dient also dazu, in den Überschussphasen den Sauerstoff zu speichern, um diesen in den Mangelphasen dann wieder abzugeben.
2. Eine effektive Methode für die Bereitstellung von Sauerstoff ist die *Sekundärlufteinblasung*. Bei dieser Maßnahme wird Luft in den Abgastrakt eingeblasen um genügend Sauerstoff für die exotherme Reaktion bereitzustellen. Die Abbildung 2.2 zeigt die Aufheizung des Katalysator bei einem Kaltstart mit und ohne Sekundärlufteinblasung.

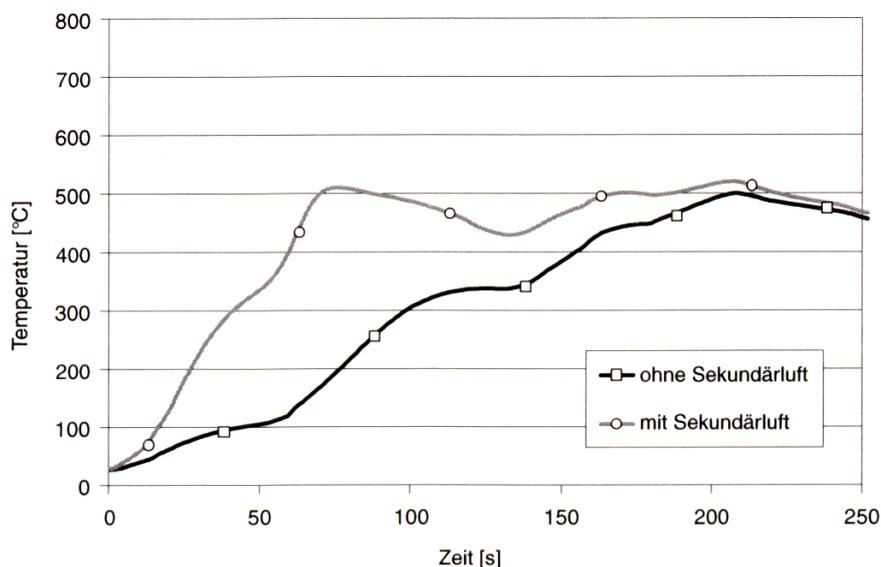


Abbildung 2.2.: Temperaturverlauf im Katalysator mit/ohne Sekundärluft (Quelle: [vBS05], S. 711)

Da die Temperatur ein entscheidender Faktor bei der Abgasnachbehandlung ist, möchte man eigentlich den Katalysator so Nahe wie möglich am Motor bauen. Durch die Verbrennungswärme im Motor könnte der Katalysator schnell auf Betriebstemperatur gebracht werden.

Ein Problem welches sich dabei darstellt, ist dass man in Motornähe nicht viel Platz für einen Katalysator hat. Deswegen besitzen Fahrzeuge häufig zwei Katalysatoren. Einen kleinen in Motornähe - den *Vorkatalysator* - und einen größeren in etwas weiterer Entfernung vom Motor - den *Hauptkatalysator*.

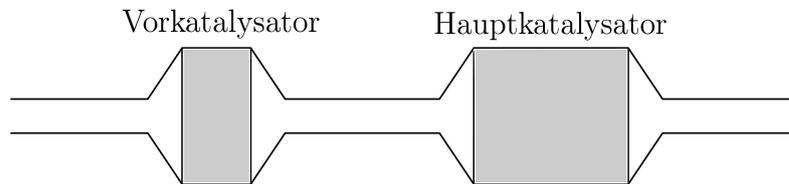


Abbildung 2.3.: Vor- und Hauptkatalysator

Dämpfer

Außer den giftigen Abgasen gibt es noch ein weiteres, (meist) unerwünschtes Produkt beim Fahrzeugbetrieb: den Lärm. Auch hierfür gibt der Gesetzgeber Richtlinien vor um die Umwelt vor den lauten Geräuschen zu schützen, die ein Fahrzeug ohne Dämpfer im Auspuff produziert. Zur Minderung der Schallemission werden meist zwei Dämpfer verwendet - ein Mittelschalldämpfer (hinter dem Hauptkatalysator) und ein Hauptschalldämpfer. Dabei unterscheidet man zwischen Reflexionsdämpfern, welche Schall durch Umleitungen dämmen, und Absorptionsdämpfern, die mit schallabsorbierenden Material gefüllt sind.

Das Auspuffrohr

Das von uns betrachtete gesamte Auspuffrohr besteht also aus einem Vorkatalysator in Motornähe, einem Hauptkatalysator, einem Mittel- und einem Hauptschalldämpfer. Alle Elemente des Auspuffs sind durch dünnere Rohrstücke miteinander verbunden.

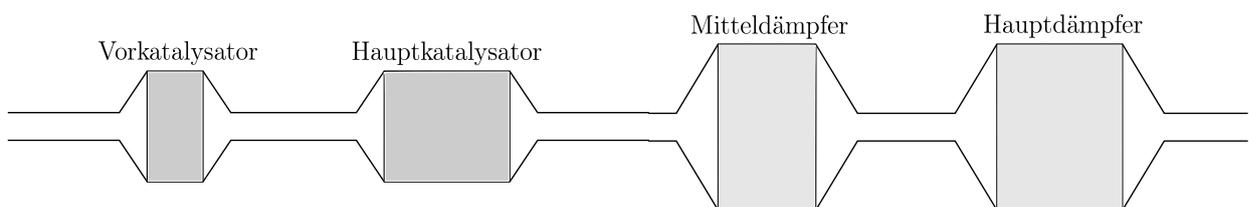


Abbildung 2.4.: Auspuffrohr mit all seinen Bestandteilen

3. Modellierung

Unser Ziel ist es ein möglichst einfaches, aber wirklichkeitsgetreues Modell für eine Rohrströmung eines Gasgemisches zu formulieren. Dabei sollen die folgenden physikalischen Phänomene Berücksichtigung finden:

1. Verbrennung/Reaktion des unverbrannten Kraftstoff im Katalysator
2. Reibung mit der Rohrwand
3. Reibung im Katalysator aufgrund der Wabenstruktur
4. Wärmeabgabe durch die Rohrwand

Die Reibung und der Wärmeaustausch mit der Wand sind typische Einflussfaktoren, wenn es um die Strömung eines Fluids durch ein Rohr geht. Die Reibung im Katalysator, welche lokal aufgrund der Wabenstruktur des Keramikblocks wirkt, sowie die exotherme Reaktion des unverbrannten Kraftstoffs, sind dem Anwendungshintergrund geschuldet. Bei der Modellierung muss außerdem beachtet werden, dass das Auspuffrohr eine nichttriviale geometrische Struktur aufweist. Zu beschreiben ist also eine *Rohrströmung mit variablem Querschnitt*.

Da unsere Welt aus drei Raumdimensionen besteht, würde man von einem "guten" Modell eigentlich auch erwarten, dass es diese drei Raumdimensionen abbildet. Man kann aber ohne allzu großen Realitätsverlust von einer dreidimensionalen Modellierung mit einem komplexen dreidimensionalen Gebiet (die Geometrie des Auspuffrohres) absehen, und entwickelt stattdessen einen eindimensionalen Ansatz. Insbesondere sind die numerischen Verfahren zur Simulation des Modells im Falle einer einzigen Raumdimension wesentlich einfacher. Es ist also nicht abwegig - zumal die dominante Strömungsrichtung längs des Auspuffrohres verläuft - anzunehmen, dass die physikalischen Größen, die wir in unserem Modell beschreiben wollen, homogen im Querschnitt sind. Diese Annahme ist zentral für die eindimensionale Modellierung, weswegen wir später nochmal auf sie eingehen werden.

Grundlegend für die Herleitung der Modellgleichungen werden die *kompribiblen Eulergleichungen der Gasdynamik* sein. Jedoch wird sich unser Modell dahingehend unterscheiden, als dass Energie und Impuls nicht erhalten bleiben, sondern durch die verschiedenen physikalischen Phänomene Änderungen erfahren. Außerdem benötigen wir neben einer Schließungsbedingung für das Gleichungssystem (dem *idealen Gasgesetz*) eine weitere partielle Differentialgleichung für die Restmenge an unverbranntem Kraftstoff im Luft-Kraftstoff-Gemisch. Dies führt uns schließlich zu einem System von *hyperbolischen Bilanzgleichungen*, welches in [LN04] und [Pet07] numerisch untersucht wurde.

Auf der Grundlage von kleinen Machzahlen vereinfachen wir dieses Modell mittels einer Asymptotik. Um die Kompatibilität des Modell mit dem richtigen Satz von Anfangs- und Randbedingungen zu gewährleisten, bedarf es noch einer Umrechnung, die uns schließlich

zur endgültigen Formulierung unseres neuen Modells führen wird.

3.1. Geometrie des Auspuffrohres

Bevor wir mit der Herleitung der Gleichungen beginnen, wollen wir uns in diesem Kapitel der geometrischen Struktur des Auspuffrohres widmen. Es bezeichne \tilde{x} die Ortsvariable, die sich längs des Auspuffrohres erstreckt. Wir nehmen an, dass das Auspuffrohr bezüglich \tilde{x} rotationssymmetrisch ist. Unser Ziel ist es nun eine Funktion \tilde{A} zu definieren, die uns zu jeder Stelle \tilde{x} die Querschnittsfläche $\tilde{A}(\tilde{x})$ liefert. Diese Querschnittsfunktion sollte natürlich hinreichend glatt sein, da auch die Ableitung dieser Funktion in unserem Modell auftaucht. Da die Eulergleichungen partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung sind und keine Terme höherer Ableitungen betrachtet werden, reicht, dass $\tilde{x} \mapsto \tilde{A}(\tilde{x})$ stetig differenzierbar ist. Im Folgenden werden wir zunächst eine Radiusfunktion \tilde{r} herleiten. In [Pet07] ist die grobe geometrische Struktur des Auspuffs mit 18 Tupeln $(\tilde{x}_i, \tilde{r}_i)$, bestehend jeweils aus Stützstelle \tilde{x}_i und dem dazugehörigen Radius \tilde{r}_i , festgelegt. In der Abbildung 3.1 sind die Punkte (und

$i = 1, \dots, 6$		$i = 7, \dots, 12$		$i = 13, \dots, 18$	
\tilde{x}_i in [m]	\tilde{r}_i in [cm]	\tilde{x}_i in [m]	\tilde{r}_i in [cm]	\tilde{x}_i in [m]	\tilde{r}_i in [cm]
0	2.1	1.48	6	2.5	2.1
0.4	2.1	1.55	6	2.64	2.1
0.43	4	1.58	2.1	2.67	9.5
0.52	4	2.0	2.1	3.07	9.5
0.55	2.1	2.03	6	3.1	2.1
1.45	2.1	2.47	6	3.6	2.1

Tabelle 3.1.: Daten zur Beschreibung der Auspuffrohr-Geometrie

deren Spiegelungen an der \tilde{x} -Achse) dargestellt. Dabei wurden die Punkte durch Geraden miteinander verbunden. Für die Übergänge zwischen Bereichen mit verschiedenen Rohrra-

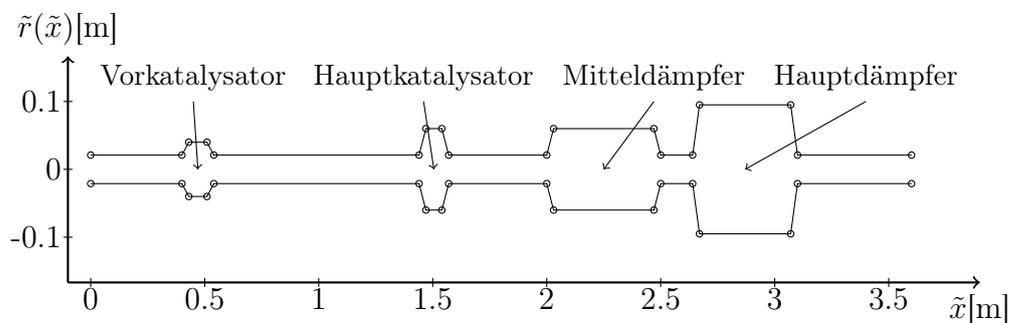


Abbildung 3.1.: Geometrie des Auspuffs

dien ist ein Bereich der Länge $\alpha = 0.03\text{m}$ eingerichtet, um eine Abbildung $\tilde{x} \mapsto \tilde{r}(\tilde{x})$ stetig differenzierbar fortsetzen zu können. Für eine Funktion $\tilde{r}_i(\tilde{x})$ welche die Stützstellen \tilde{x}_{i-1} und \tilde{x}_i verbinden soll, fordern wir folgende Bedingungen:

1. $\tilde{r}_i(\tilde{x}_{i-1}) = \tilde{r}_{i-1}$
2. $\tilde{r}_i(\tilde{x}_i) = \tilde{r}_i$
3. $\tilde{r}'_i(\tilde{x}_{i-1}) = 0$
4. $\tilde{r}'_i(\tilde{x}_i) = 0$

Wir verwenden ebenso wie in [Pet07] hierfür ein kubisches Polynom

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{a}(\tilde{x} - \tilde{x}_{i-1})^3 + \tilde{b}(\tilde{x} - \tilde{x}_{i-1})^2 + \tilde{c}(\tilde{x} - \tilde{x}_{i-1}) + \tilde{d}$$

mit $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{R}$. Setzen wir die Bedingungen 1. - 4. ein, so erhalten wir für unsere gesuchte Funktion \tilde{r}_i für Werte $\tilde{x} \in [\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$:

$$\tilde{r}_i(\tilde{x}) = -2 \frac{\tilde{r}_i - \tilde{r}_{i-1}}{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})^3} (\tilde{x} - \tilde{x}_{i-1})^3 + 3 \frac{\tilde{r}_i - \tilde{r}_{i-1}}{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})^2} (\tilde{x} - \tilde{x}_{i-1})^2 + \tilde{r}_{i-1}$$

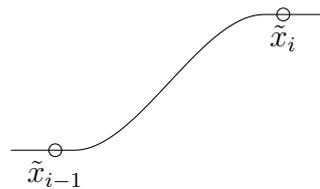


Abbildung 3.2.: Kubisches Polynom $\tilde{r}_i(\tilde{x})$ im Intervall $[\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$

Wir können nun eine Radiusfunktion \tilde{r} auf dem kompletten Intervall $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_{18}]$ definieren, indem wir die Funktionen \tilde{r}_i stückweise zusammensetzen. Verbinden wir zwei Stützstellen die den gleichen Radius haben (zum Beispiel \tilde{x}_1 mit \tilde{x}_2), verschwinden die Faktoren vor den Termen dritter und zweiter Ordnung im Polynom und wir erhalten eine konstante Funktion (zum Beispiel $\tilde{r}(\tilde{x}) = \tilde{r}_1$ auf dem Intervall $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$).

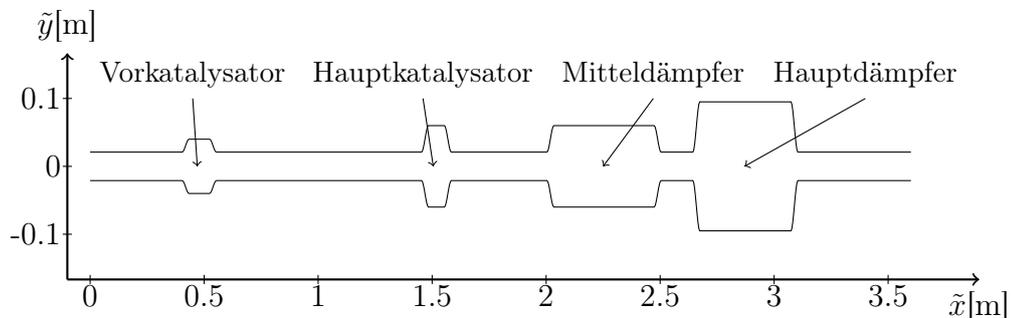


Abbildung 3.3.: Die Funktion \tilde{r} und ihre Spiegelung

Schließlich erhalten wir die Querschnittsfunktion \tilde{A} und die Umfangsfunktion \tilde{w} durch

$$\tilde{A}(\tilde{x}) := \pi \cdot \tilde{r}(\tilde{x})^2 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{w}(\tilde{x}) := 2\pi \cdot \tilde{r}(\tilde{x}) \quad \text{für} \quad \tilde{x} \in [0, 3.6].$$

3.2. Herleitung der eindimensionalen Modellgleichungen

Zunächst gehen wir auf die in der Einleitung zu diesem Kapitel beschriebene Annahme *Homogenität im Querschnitt* ein.

3.1 Annahme Es beschreibe $\tilde{y}^*(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}, \tilde{t})$ eine der betrachteten physikalischen Zustandsgrößen¹ und $\tilde{\mathbf{u}}^*(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}, \tilde{t})$ den Geschwindigkeitsvektor des zu beschreibenden Fluids am Ort im Auspuffrohr $(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)})$ zum Zeitpunkt \tilde{t} . Wir nehmen nun an, dass alle Größen *homogen im Querschnitt* sind und dass der Geschwindigkeitsvektor nur entlang des Auspuffrohres nicht verschwindenden Eintrag besitzt. Konkret bedeutet das für uns:

1. Für festes \tilde{x} zu einem festen Zeitpunkt \tilde{t} sind alle betrachteten physikalischen Zustandsgrößen $\tilde{y}^*(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}, \tilde{t})$ für alle $(\tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)})$ im Auspuff konstant. Wir schreiben nun statt $\tilde{y}^*(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}, \tilde{t})$ stets $\tilde{y}(\tilde{x}, \tilde{t})$.
2. Die $\tilde{x}^{(2)}$ und die $\tilde{x}^{(3)}$ Richtungskomponenten des Geschwindigkeitsvektors $\tilde{\mathbf{u}}$ verschwinden für alle zu betrachtenden \tilde{x} und \tilde{t} :

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}, \tilde{t}) = (\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}), 0, 0)^T.$$

Als räumliches Gebiet betrachten wir nun kein komplexes dreidimensionales Objekt (das Auspuffrohr), sondern das Intervall $[0, L]$, wobei $L = 3.6\text{m}$ für die Länge des Auspuffrohres steht. Mit Hilfe der obigen Annahmen und der Querschnittsfunktionen \tilde{A} können wir nun ein eindimensionales Modell formulieren, welches die räumliche dreidimensionale Struktur des Auspuffrohres berücksichtigt. Zur Herleitung unserer Modellgleichungen bedienen wir uns stets der Menge $\Omega := \{\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}) \in \mathbb{R}^3 | \tilde{x} \in (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \text{ und } (\tilde{x}^{(2)})^2 + (\tilde{x}^{(3)})^2 \leq \tilde{r}(\tilde{x})^2\}$ (vgl. Abbildung 3.4), welche ein beliebiges Teilstück des betrachteten Auspuffrohres darstellt.

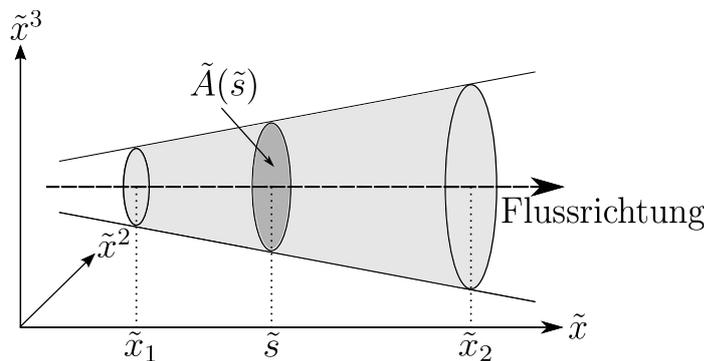


Abbildung 3.4.: Die Menge Ω

¹zum Beispiel die Dichte ($\tilde{\rho}$), die Temperatur (\tilde{T}), den Druck (\tilde{p}) oder die Restmenge an unverbrannten Kraftstoff (\tilde{z})

3.2 Bemerkung Nur die unter 2. beschriebene Annahme ist tatsächlich notwendig. Zwar ist es für unser Modell ebenfalls notwendig, dass die Zustandsgrößen neben der Zeit \tilde{t} nur von einer eindimensionalen räumlichen Variable \tilde{x} abhängen. Dies lässt sich jedoch auch ohne Annahme, sondern durch Mittlung der Zustandsgrößen $\tilde{y}^*(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}, \tilde{t})$ über die beiden Ortsvariablen $\tilde{x}^{(2)}$ und $\tilde{x}^{(3)}$ (also über den Querschnitt des Auspuffrohres), gewinnen. Unter der Annahme, dass die Zustandsgröße \tilde{y}^* zum Beispiel stetig ist, folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integration, die Existenz von Werten $\tilde{\xi}^{(2)}$ und $\tilde{\xi}^{(3)}$, sodass

$$\iint \tilde{y}^*(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}, \tilde{t}) d\tilde{x}^{(2)} d\tilde{x}^{(3)} = \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{y}^*(\tilde{x}, \tilde{\xi}^{(2)}, \tilde{\xi}^{(3)}, \tilde{t}) =: \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{y}(\tilde{x}, \tilde{t})$$

Wir sind nun in der Lage ein eindimensionales Modell für eine Strömung durch ein Rohr mit variablen Querschnitt aufzustellen.

3.2.1. Massenerhaltung

Beschreibe $\rho(\tilde{x}, \tilde{t})$ die Dichte des Fluids an der Stelle \tilde{x} zum Zeitpunkt \tilde{t} . Die Gesamtmasse des Fluids in einem beliebigen Teilstück des Auspuffs Ω , errechnet sich aus dem Dichte-Integral über das betrachtete dreidimensionale Gebiet. Da die Dichtefunktion nur von der räumlichen Variablen \tilde{x} abhängt, ergibt sich eine Formulierung der Gesamtmasse mit Hilfe eines eindimensionalen Integrals.

$$\begin{aligned} \tilde{m}(\tilde{t}) &:= \int_{\Omega} \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \cdot \left(\iint d\tilde{x}^{(2)} d\tilde{x}^{(3)} \right) d\tilde{x} \\ &= \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} \end{aligned}$$

Um die Änderung der Gesamtmasse im Teilstück des Auspuffrohres Ω zu bestimmen, stellen wir eine Bilanz auf. Da weder Massenquellen noch -senken existieren, ergibt sich eine zeitliche Änderung der Masse $\tilde{m}(\tilde{t})$ nur durch Zu- beziehungsweise Abflüsse aus dem betrachteten Gebiet².

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} = \underbrace{-\tilde{A}(\tilde{x}_2) \rho(\tilde{x}_2, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}_2, \tilde{t})}_{\text{Massenabfluss an der Grenze } \tilde{x}_2} + \underbrace{\tilde{A}(\tilde{x}_1) \tilde{\rho}(\tilde{x}_1, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{t})}_{\text{Massenzufluss an der Grenze } \tilde{x}_1}$$

Mit der Annahme, dass das Produkt $\tilde{A}\tilde{\rho}$ stetig partiell differenzierbar ist, können wir die Differentiation nach \tilde{t} mit der Integration in \tilde{x} in der obigen Gleichung vertauschen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erlaubt uns die rechte Seite der Gleichung in Integralform zu schreiben. Wir erhalten somit

$$\int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} (\tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}))_{\tilde{t}} d\tilde{x} = - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} (\tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}))_{\tilde{x}} d\tilde{x}.$$

²Wir sprechen hier von Zu- und Abflüssen, weil wir in unserem Modell stets eine positive Strömungsgeschwindigkeit von Motor durch den Auspuff erwarten. Im Allgemeinen könnte \tilde{u} sein Vorzeichen wechseln.

Da die Wahl der Menge Ω und somit auch des Intervalls $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$ beliebig war, gilt die Gleichheit auch punktweise. Indem wir das Integral einfach weglassen erhalten wir eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in $\tilde{\rho}$ und \tilde{u} , welche in unserem Modell die Massenerhaltung darstellt.

$$\boxed{(\tilde{A}\tilde{\rho})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u})_{\tilde{x}} = 0} \quad (3.1)$$

3.2.2. Die Reaktionsgleichung

Die Reaktionsgleichung soll den Transport und die Reaktion des unverbrannten Kraftstoffs im Gasgemisch beschreiben. Der prozentuale Anteil des noch nicht oxidierten Kraftstoffes im Fluid an der Stelle \tilde{x} zum Zeitpunkt \tilde{t} wird durch $\tilde{z}(\tilde{x}, \tilde{t})$ beschrieben. Somit steht das Produkt $\tilde{\rho}\tilde{z}$ für die Dichte des unverbrannten Kraftstoffes. Der Transport dieses Produktes kann also fast genauso wie in der Massenerhaltung beschrieben werden.

$$(\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{z})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{z})_{\tilde{x}} = 0$$

Jedoch bleibt die Menge an Restsprit nicht unverbraucht, sondern reagiert in den Katalysatoren exotherm, um die Temperatur dort zu erhöhen. Wir nehmen an, dass diese Umwandlung des unverbrannten Kraftstoffes in verbranntes, ein unumkehrbarer chemischer Prozess sei, der ohne Zwischenstufen abläuft - das heißt es gibt nur die Zustände *verbrannt* und *unverbrannt*. Wie viel von dem unverbrannten Kraftstoff oxidiert geben wir durch die temperaturabhängige Reaktionsratenfunktion $\tilde{K}(\tilde{T})$ an. Wie bei den meisten Reaktionen, nimmt die Reaktionsrate mit steigender Temperatur zu. Neben der Temperatur gibt es zwei Modellparameter, welche maßgeblich in $\tilde{K}(\tilde{T})$ eingehen: die *Reaktionsgeschwindigkeitskonstante* K_0 und die *Aktivierungsenergie* E^+ . In unserem Modell definieren wir die Funktion $\tilde{K}(\tilde{T})$ wie folgt:

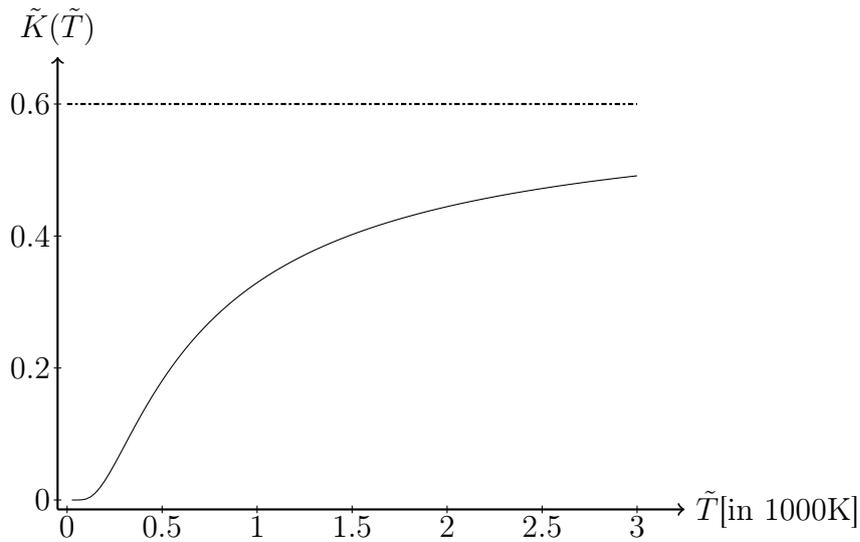
$$\tilde{K}(\tilde{T}) := K_0 \cdot \exp(-E^+/\tilde{T}).$$

Diese Abhängigkeit zwischen Reaktionsgeschwindigkeit und Temperatur ist in der Literatur unter *Arrhenius-Gleichung* beschrieben. Der graphische Verlauf für die Werte $K_0 = 0.6$ und $E^+ = 600\text{K}$ ist in der Abbildung 3.5 dargestellt. Da diese Verbrennung nur lokal innerhalb der Katalysatoren stattfindet, führen wir für die Stellen an denen sich Katalysatoren im Auspuffrohr befinden eine *charakteristische Funktion* $\tilde{\chi}$ ein.

$$\tilde{\chi}(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & \text{in den Katalysatoren} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da der Kontakt mit den Katalysator und somit auch die exotherme Reaktion sich über den gesamten Querschnitt ausbreitet, wird der Massenverlust an unverbranntem Kraftstoff durch den Term $-\tilde{A}\tilde{\chi}\tilde{\rho}\tilde{z}\tilde{K}(\tilde{T})$ beschrieben. Wir erhalten schließlich als Reaktionsgleichung:

$$\boxed{(\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{z})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{z})_{\tilde{x}} = -\tilde{A}\tilde{\chi}\tilde{\rho}\tilde{z}\tilde{K}(\tilde{T})}. \quad (3.2)$$

Abbildung 3.5.: Arrhenius-Kurve für $K_0 = 0.6$ und $\tilde{E}^+ = 600K$

3.3 Bemerkung Im Modell von LACOSTE und NATALINI wird die Verbrennung durch den Term $-\tilde{\chi}\tilde{\rho}\tilde{z}\tilde{K}(\tilde{T})$ modelliert. Im Gegensatz zu unserem Ansatz würde dies bedeuten, dass unabhängig von der Katalysatorgröße die gleiche Menge an Kraftstoff verbrennen würde. Da wir in den Katalysatorintervallen durch den Term $\tilde{A} \approx 0.005 - 0.01 \text{ m}^2$ eine Gewichtung kleiner Eins erfahren, müssen wir im Vergleich zum Modell von LACOSTE und NATALINI die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0 anpassen. Da diese zwischen Werten um 1 variiert wurde, wählen wir für unser Modell den Wert $K_0 = 200$. So sollten wir später in der Lage sein ein ähnliches Lösungsverhalten in \tilde{z} zu erzielen.

3.2.3. Impulsbilanz

Die Impulsdichte zum Zeitpunkt \tilde{t} an der Stelle \tilde{x} ist definiert durch das Produkt von Dichte $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t})$ und Geschwindigkeit $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})$. Der Gesamtimpuls $\tilde{i}(\tilde{t})$ in einem Teilstück des Auspuffs Ω bestimmt sich durch die Integration der Impulsdichte über Ω und kann wie bereits beim Abschnitt zur Massenerhaltung durch ein eindimensionales Integral beschrieben werden.

$$\tilde{i}(\tilde{t}) := \int_{\Omega} \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}(\tilde{x})\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})d\tilde{x}$$

Das *zweite Newton'sche Gesetz* besagt, dass die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses gleich der Summe aller äußerer Kräfte ist, welche auf die betrachtete Masse wirken. In unserem Modell ergibt sich die Änderung des Gesamtimpulses durch die Betrachtung folgender Einflussgrößen:

1. Differenz von Impulszufluss und -abfluss durch den Rand es betrachteten Teilstücks.

Wie schon bei der Herleitung der Massenerhaltung gilt auch hier, dass die Differenz aus Impulszufluss und -abfluss sich ergibt aus

$$\begin{aligned} & \underbrace{-\tilde{A}(\tilde{x}_2)\rho(\tilde{x}_2, \tilde{t})\tilde{u}(\tilde{x}_2, \tilde{t})^2}_{\text{Impulsabfluss an der Grenze } \tilde{x}_2} + \underbrace{\tilde{A}(\tilde{x}_1)\tilde{\rho}(\tilde{x}_1, \tilde{t})\tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{t})^2}_{\text{Impulszufluss an der Grenze } \tilde{x}_1} \\ &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} (\tilde{A}(\tilde{x})\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t})\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})^2)_{\tilde{x}} d\tilde{x}. \end{aligned}$$

2. Oberflächenkraft (Druckkraft)

Sei \tilde{p} der Druck der auf die Oberfläche unseres Fluids (das Luft-Kraftstoff-Gemisch) wirkt. Würden wir zunächst nur die Kräfte berücksichtigen, die auf Boden³ $\partial\Omega_B$ und Deckel⁴ $\partial\Omega_D$ des betrachteten Teilstücks Ω wirken, so würde dies zur Folge haben, dass selbst bei einem konstanten Druck \tilde{p}_{const} die Gasmasse in Ω wegen der verschiedenen Querschnittsflächen fließen würde.

$$\tilde{F}_{\tilde{p}} = -\tilde{A}(\tilde{x}_2)\tilde{p}_{const} + \tilde{A}(\tilde{x}_1)\tilde{p}_{const} = -\tilde{p}_{const}(\tilde{A}(\tilde{x}_2) - \tilde{A}(\tilde{x}_1))$$

Um dieses Fehlverhalten zu korrigieren, müssen wir noch einen Term mitberücksichtigen, der dafür sorgt, dass bei konstanten Druck (unter Ausschluss sonstiger Kräfte) kein Massenfluss stattfindet. Diese Gegenkraft, die in einem Rohrstück mit variablen Querschnitt auf die Masse wirkt, ist jene die das Fluid durch die Verengung beziehungsweise Erweiterung des Rohrs erfährt. Wir beschreiben sie durch das Integral

$$\int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}_{\tilde{x}}(\tilde{x})\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x}.$$

Wir erhalten somit für die Druckkraft insgesamt den Ausdruck

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\tilde{p}} &= -\tilde{A}(\tilde{x}_2)\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{A}(\tilde{x}_1)\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}_{\tilde{x}}(\tilde{x})\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} \\ &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}_{\tilde{x}}(\tilde{x})\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \tilde{A}(\tilde{x})\tilde{p}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} + \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}_{\tilde{x}}(\tilde{x})\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} \\ &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}(\tilde{x})\tilde{p}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Die negativen Vorzeichen tauchen auf, da die Druckkraft entgegen der Richtung des äußeren Normalenvektors wirkt.

³ $\partial\Omega_B := \{(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}) \in \mathbb{R}^3 | \tilde{x} = \tilde{x}_2 \text{ und } (\tilde{x}^{(2)})^2 + (\tilde{x}^{(3)})^2 \leq \tilde{r}(\tilde{x}_2)^2\}$

⁴ $\partial\Omega_D := \{(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}) \in \mathbb{R}^3 | \tilde{x} = \tilde{x}_1 \text{ und } (\tilde{x}^{(2)})^2 + (\tilde{x}^{(3)})^2 \leq \tilde{r}(\tilde{x}_1)^2\}$

3. Widerstandskraft I: Rohrwandreibung

Wir betrachten wie in [Bau10] und [Ris96] die von der Strömungsrichtung abhängige Schubspannung

$$\tilde{\tau}_{w1} = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t})}{2} \cdot \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) |\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})|$$

Da wir in unserem Modell stets von einer positiven Strömungsrichtung ausgehen können, lassen wir die Betragsstriche in Zukunft wegfallen. Der Wert λ bezeichnet die Reibungsintensität mit der Wand und heißt *Rohr-Reibungskoeffizient*. Abhängig für die Berechnung des Wertes für λ ist die Strömungsintensität, welche wir in die Klassen *laminare* und *turbulente* Strömung einteilen. Ein Maß dafür wie stark die Strömung ist, liefert die *Reynoldszahl* (Re). Sie berechnet sich aus dem charakteristischen Durchmesser (\tilde{d}_{ch}), der Strömungsgeschwindigkeit (\tilde{u}), der Dichte ($\tilde{\rho}$) und der dynamischen Viskosität⁵ des betrachteten Fluids ($\tilde{\eta}$).

$$Re = \frac{\tilde{d}_{ch} \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{\rho}}{\tilde{\eta}}$$

Als Näherungswert für die Katalysatoren und die Dämpfer in denen wir ein laminares Strömungsverhalten vermuten (da geringe Geschwindigkeiten und somit auch geringere Reynoldszahlen erwartet werden), wählen wir wie auch [LN04] die Näherung von *G. Hagen* und *J. L. Poiseuille*

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Für die weiteren Rohrstücke in denen wir eine turbulente Strömung erwarten, wählen wir das Widerstandsgesetz zur Bestimmung eines Näherungswertes für λ von *H. Blasius*

$$\lambda = 0,3164 \cdot Re^{-0.25}.$$

Um die Widerstandskraft, welche aus der Reibung mit der Rohrwand resultiert, zu errechnen, bedarf es einer Überlegung für drei Dimensionen. Die im Teilstück Ω für die Reibung verantwortliche Oberfläche besteht lediglich aus dem Mantel⁶ $\partial\Omega_M$. Daher lautet die Gleichung für die Widerstandskraft

$$\tilde{F}_{w1} = - \int_{\partial\Omega_M} \tilde{\tau}_{w1} dS(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Da $\tilde{\tau}_{w1}$ nur von \tilde{x} und \tilde{t} abhängt, folgt

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{w1} &= - \int_{\partial\Omega_M} \tilde{\tau}_{w1} dS(\tilde{\mathbf{x}}) = - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{\tau}_{w1} \cdot \left(\iint dS(\tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}) \right) d\tilde{x} \\ &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \frac{C_f}{2} \tilde{u}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})^2 d\tilde{x} \end{aligned}$$

⁵Berechnung der dynamischen Viskosität im Anhang A.1

⁶ $\partial\Omega_M := \{(\tilde{x}, \tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}) \in \mathbb{R}^3 | \tilde{x} \in (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \text{ und } (\tilde{x}^{(2)})^2 + (\tilde{x}^{(3)})^2 = \tilde{r}(\tilde{x})^2\}$

wobei $C_f := \lambda/4$ und \tilde{w} für den ortsabhängigen Umfang des Rohres steht. Da wir abhängig vom Ort verschiedene Strömungsintensitäten haben, ist auch C_f ortsabhängig.

4. Widerstandskraft II: Reibung im Katalysator

Zur Beschreibung der Reibungskraft, die das Fluid beim Durchströmen eines porösen Mediums - dem Katalysator - erfährt, verwenden wir wie in [LN04] ein lineares Reibungsgesetz.

$$\tilde{\tau}_{w1} = C \cdot \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \cdot \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})$$

wobei C für den Reibungskoeffizienten steht, welcher in [LN04] durch vorliegende Messdaten von MAGNETI MARELLI geschätzt wurde. Da diese Reibung nur lokal in den beiden Katalysatoren auftritt, multiplizieren wir den Reibungsterm mit der charakteristischen Funktion $\tilde{\chi}$. Im Gegensatz zur Wandreibung wirkt die Katalysatorreibung nicht nur an der Rohrwand, sondern im gesamten Querschnitt des Auspuffrohres. Wir betrachten also kein Oberflächen- sondern ein Volumenintegral. Durch analoge Umformungen erhalten wir schließlich

$$\tilde{F}_{w2} = - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} C \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\chi}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x}.$$

Folglich setzt sich die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses in einer betrachteten Teilmenge Ω aus der Summe aller Kräfte zusammen, die auf die Gesamtmasse in diesem Gebiet wirkt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} (\tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})^2)_{\tilde{x}} d\tilde{x} - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{p}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} \\ &\quad - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} C_f \tilde{w}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \frac{\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})^2}{2} d\tilde{x} - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} C \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\chi}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} \end{aligned}$$

Da die Wahl von Ω beziehungsweise $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]$ beliebig war, gilt die Gleichheit auch punktweise. Wir erhalten die Bilanz für den Impuls in unserem Modell:

$$\boxed{(\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u}^2)_{\tilde{x}} + \tilde{A}\tilde{p}_{\tilde{x}} = -C_f\tilde{w}\tilde{\rho}\frac{\tilde{u}^2}{2} - C\tilde{A}\tilde{\chi}\tilde{\rho}\tilde{u}}. \quad (3.3)$$

3.2.4. Energiebilanz

Wir betrachten die Energiedichte ($\tilde{\rho}\tilde{E}$), welche sich aus der *kinetischen* ($\tilde{\rho}\frac{\tilde{u}^2}{2}$), der *inneren* ($\tilde{\rho}\tilde{e} = c_v\tilde{T}$) und der *chemischen* Energiedichte ($q_0\tilde{\rho}\tilde{z}$) zusammensetzt. Letztere steht für die in chemischen Verbindungen gespeicherte Energie der Restmenge an unverbrannten Kraftstoff. Dieser Bestandteil der Energie ist somit insbesondere für die in Abschnitt (2.2) beschriebene

Aufwärmung des Katalysators wichtig. Die Gesamtenergie die sich in einem Teilstück des Auspuffs Ω vorfindet, bezeichnen wir mit

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{t}) := \int_{\Omega} \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x}.$$

Grundlage für die Bestimmung der zeitlichen Änderung der Gesamtenergie $\tilde{\varepsilon}(\tilde{t})$, liefert der *erste Lehrsatz der Thermodynamik*. Dieser besagt, dass die Energie sich entweder durch Verrichtung von Arbeit oder durch Übertragung von Wärme ändern kann. Die Bilanzierungsterme der Gesamtenergie werden im Folgenden dargestellt.

1. Differenz von Energiezufluss und -abfluss durch den Rand des betrachteten Teilstücks

Analog zur Herleitung der Massenerhaltung und Impulsbilanz gilt auch hier, dass die Differenz aus Energiezufluss und -abfluss sich ergibt aus

$$\begin{aligned} & \underbrace{-\tilde{A}(\tilde{x}_2) \tilde{\rho}(\tilde{x}_2, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}_2, \tilde{t}) \tilde{E}(\tilde{x}_2, \tilde{t})}_{\text{Energieabfluss an der Grenze } \tilde{x}_2} + \underbrace{\tilde{A}(\tilde{x}_1) \tilde{\rho}(\tilde{x}_1, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{t}) \tilde{E}(\tilde{x}_1, \tilde{t})}_{\text{Energiezufluss an der Grenze } \tilde{x}_1} \\ & = - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} (\tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{t}))_{\tilde{x}} d\tilde{x}. \end{aligned}$$

2. Druckänderungsarbeit

Die Druckänderungsarbeit wird nach [AS09] durch das Produkt aus Druck, Fläche und Geschwindigkeit beschrieben. Wir modellieren diese Arbeit für unser Teilstück Ω durch die Betrachtung der wirkenden Druckänderungsarbeit an Boden Ω_B und Deckel Ω_D .

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\tilde{p}} &= -\tilde{A}(\tilde{x}_2) \tilde{p}(\tilde{x}_2, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}_2, \tilde{t}) + \tilde{A}(\tilde{x}_1) \tilde{p}(\tilde{x}_1, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}_1, \tilde{t}) \\ &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} (\tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}))_{\tilde{x}} d\tilde{x} \end{aligned}$$

3. Wärmeabgabe nach Außen

Während die heißen Abgase durch das Auspuffrohr strömt, findet zwischen dem Fluid und der Rohrwand ein Austausch von Wärmeenergie statt. Da wir von einem heißen Gasgemisch und einer kälteren Rohrwand ausgehen können, sprechen wir stets von einer *Wärmeabgabe*. Abhängig von einem *Wärmedurchgangskoeffizienten* h wird die Wärmeabgabe beschrieben durch

$$\tilde{q} = -h \cdot (\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{T}_{\text{Wand}})$$

wobei \tilde{T}_{Wand} für die Temperatur der Wand steht und sich in unserem Fall durch das arithmetische Mittel aus Gastemperatur \tilde{T} und konstanter Außentemperatur ($\tilde{T}_{ex} = 20^\circ\text{C}$) errechnet.

$$\tilde{T}_{\text{Wand}} = \frac{1}{2}((\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{T}_{ex}))$$

Betrachten wir nun den Wärmeabfluss über das Gebiet Ω . Da der Wärmeaustausch nur an der Rohrwand stattfindet, ist lediglich das Oberflächenintegral über den Mantel $\partial\Omega_M$ zu berücksichtigen.

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\tilde{q}} &= - \int_{\partial\Omega_M} \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{t}) dS(\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{t}) \cdot \left(\iint dS(\tilde{x}^{(2)}, \tilde{x}^{(3)}) \right) d\tilde{x} \\ &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} -h\tilde{w}(\tilde{x})(\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{T}_{\text{Wand}}) d\tilde{x} \end{aligned}$$

Den Wert für den Wärmedurchgangskoeffizienten h entnehmen wir [LN04]. Dieser wurde dort mit Hilfe von experimentell ermittelten Daten des Autozulieferers MAGNETI MARELLI geschätzt.

Wir erhalten also insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x} &= - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} (\tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{t}))_{\tilde{x}} d\tilde{x} \\ &\quad - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} (\tilde{A}(\tilde{x}) \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}))_{\tilde{x}} d\tilde{x} - \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \tilde{w}(\tilde{x}) h (\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{t}) - \tilde{T}_{\text{Wand}}) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Wie bei der Massenerhaltung und der Impulsbilanz folgt durch Weglassen der Integralzeichen

$$\boxed{(\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{E})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{u}(\tilde{\rho}\tilde{E} + \tilde{p}))_{\tilde{x}} = -\tilde{w}h(\tilde{T} - \tilde{T}_{\text{Wand}})}. \quad (3.4)$$

3.3. Die Modellgleichungen

Die Gleichungen (3.1) - (3.4) beinhalten die unbekanntenen abhängigen Variablen Dichte ($\tilde{\rho}$), Druck (\tilde{p}), Geschwindigkeit (\tilde{u}), Temperatur (\tilde{T}) sowie Restanteil Kraftstoff (\tilde{z}). Um das noch unterbestimmte System, bestehend aus fünf Unbekannten und vier Gleichungen, zu komplettieren, bedienen wir uns einer Schließungsbedingung, dem *idealen Gasgesetz*

$$\tilde{p} = R\tilde{\rho}\tilde{T},$$

mit R der *idealen Gaskonstante*. Nun haben wir fünf Gleichungen für fünf Unbekannte und somit ein geschlossenes Modell für die Strömung eines zum Teil unverbrannten Luft-Kraftstoff-Gemisches durch ein Rohr mit variablen Querschnitt.

$$\begin{aligned}
 (\tilde{A}\tilde{\rho})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u})_{\tilde{x}} &= 0 \\
 (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u}^2)_{\tilde{x}} + \tilde{A}\tilde{p}_{\tilde{x}} &= -C_f\tilde{w}\tilde{\rho}\frac{\tilde{u}^2}{2} - C\tilde{A}\tilde{\chi}\tilde{\rho}\tilde{u} \\
 (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{E})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{E})_{\tilde{x}} + (\tilde{A}\tilde{u}\tilde{p})_{\tilde{x}} &= -\tilde{w}h(\tilde{T} - \tilde{T}_{\text{Wand}}) \\
 (\tilde{A}\tilde{\rho}\tilde{z})_{\tilde{t}} + (\tilde{A}\tilde{u}\tilde{\rho}\tilde{z})_{\tilde{x}} &= -\tilde{A}\tilde{\chi}\tilde{\rho}\tilde{z}\tilde{K}(\tilde{T}) \\
 \tilde{p} &= R\tilde{\rho}\tilde{T}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dieses System von *hyperbolischen Bilanzgleichungen* wurde in [LN04] und [Pet07] numerisch untersucht. Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es, aus (3.5) ein einfacheres Modell herzuleiten, welches aber an qualitativer und quantitativer Aussagekraft möglichst wenig einbüßen sollte.

3.4. Skalierung

In diesem Abschnitt wollen wir die Modellgleichungen zunächst skalieren. Dies ist notwendig um schließlich ein vereinfachtes Modell herzuleiten. In dem Modell (3.5) sind bisher alle Größen dimensionsbehaftet. Dies wurde stets durch das Zeichen \sim über der Variable gekennzeichnet. Den Übergang zwischen dem dimensionsbehafteten und dem dimensionslosen/skalierten Modell, schaffen wir durch die Einführung von Referenzgrößen y_r . Diese haben die gleiche Einheit wie die jeweiligen dimensionsbehafteten Größen mit der Tilde \tilde{y} und stehen zusammen mit der dimensionslosen Variable y in folgender Beziehung:

$$\tilde{y} = y_r \cdot y.$$

Entscheidend für die Wahl des Referenzwertes y_r ist die Tatsache, dass die dimensionslose Variable die Größenordnung 1 aufweisen soll. So kann man nun mit Hilfe der Modellparameter und Referenzgrößen auf die Größenordnung einzelner Terme in den Gleichungen schließen. Die Tabellen 3.2 und 3.3 enthalten die Referenzgrößen und Referenzwerte⁷ beziehungsweise die Modellparameter des Systems.

Die dimensionslosen abhängigen Variablen sollen von den ebenfalls dimensionslosen unabhängigen Variablen t und x abhängen:

$$\tilde{y}(\tilde{x}, \tilde{t}) = y_r \cdot y(x, t).$$

Das hat Konsequenzen für die Ableitungen nach \tilde{x} und \tilde{t} . Wir fassen die dimensionslosen unabhängigen Variablen als Funktionen von den dimensionsbehafteten Variablen auf.

$$x = x(\tilde{x}) = \frac{1}{x_r} \cdot \tilde{x} \quad \text{und} \quad t = t(\tilde{t}) = \frac{1}{t_r} \cdot \tilde{t}$$

⁷Der Grund für zwei verschiedene Referenzwerte für $\tilde{\chi}$ wird in der Bemerkung 3.4 erläutert

Variable	Einheit	Referenzgröße	typischer Referenzwert
\tilde{t}	s	$t_r = x_r/u_r$	0.18s
\tilde{x}	m	$x_r = L$	3.6m
\tilde{r}	m	r_r	0.095 m
\tilde{w}	m	$w_r = 2\pi r_r$	≈ 0.6 m
\tilde{A}	m ²	$A_r = \pi r_r^2$	≈ 0.03 m ²
$\tilde{\chi}$		$\chi_r^{(1)}$	1/24
		$\chi_r^{(2)}$	1
$\tilde{\rho}$	kg m ⁻³	ρ_r	1.2 kg m ⁻³
\tilde{u}	m s ⁻¹	u_r	40 m s ⁻¹
\tilde{p}	kg m ⁻¹ s ⁻²	p_r	10 ⁵ kg m ⁻¹ s ⁻²
\tilde{T}	K	$T_r = p_r/(R\rho_r)$	300 K
\tilde{z}		z_r	0.1

Tabelle 3.2.: Referenzgrößen und dazugehörige Referenzwerte

So folgt für die Differentiation nach \tilde{x} und \tilde{t}

$$\frac{d}{d\tilde{x}}\tilde{y}(\tilde{x}, \tilde{t}) = y_r \frac{d}{dx}y(x, t) = y_r \frac{d}{dx}y(x, t) \cdot \frac{d}{d\tilde{x}}x(\tilde{x}) = \frac{y_r}{x_r}y_x(x, t)$$

und

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{y}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{y_r}{t_r}y_t(x, t) = \frac{y_r \cdot u_r}{x_r}y_t(x, t)$$

Durch das Ersetzen der dimensionsbehafteten Variablen \tilde{y} mit dem Produkt aus Referenzgröße und skaliertes Variable $y_r \cdot y$, erhalten wir nach einigen elementaren Umformungen das skalierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
& (A\rho)_t + (A\rho u)_x = 0 \\
& (A\rho u)_t + (A\rho u^2)_x + \left(\frac{p_r}{\rho_r u_r^2}\right) A p_x = - \left(\frac{C_f w_r x_r}{A_r}\right) w \rho \frac{u^2}{2} - \left(\frac{C \chi_r^{(1)} x_r}{u_r}\right) A \chi^{(1)} \rho u \\
& (A\rho T)_t + \left(\frac{\rho_r u_r^2 R}{p_r c_v}\right) (A\rho \frac{u^2}{2})_t + \left(\frac{\rho_r z_r q_0 R}{p_r c_v}\right) (A\rho z)_t + (A\rho u T)_x \\
& + \left(\frac{\rho_r u_r^2 R}{p_r c_v}\right) (A\rho \frac{u^3}{2})_x + \left(\frac{\rho_r z_r q_0 R}{p_r c_v}\right) (A\rho u z)_x + \frac{R}{c_v} (A u p)_x = - \left(\frac{w_r x_r h}{c_v \rho_r A_r u_r}\right) w (T - T_{\text{Wand}}) \\
& (A\rho z)_t + (A\rho u z)_x = - \left(\frac{K_0 \chi_r^{(2)} x_r}{u_r}\right) A \chi^{(2)} \rho z K(T)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$p = \rho T,$$

wobei die dimensionslose Reaktionsraten-Funktion wie folgt definiert ist:

$$K(T) := \frac{1}{K_0} \cdot \tilde{K}(T_r T).$$

Modellparameter	Einheit	Parameterwert
C_f		$1.13 \cdot 10^{-3}$ in Katalysatoren und Dämpfern
		$1.09 \cdot 10^{-2}$ sonst
C	s^{-1}	800
q_0	$m^2 s^{-2}$	$5 \cdot 10^6$
h	$kg s^{-2} K^{-1}$	665
K_0		200
E^+	K	600
γ		1,4
R	$m^2 s^{-2} K^{-1}$	287,08
c_v	$m^2 s^{-2} K^{-1}$	717,7
\tilde{T}_{ex}	K	293,15

Tabelle 3.3.: Modellparameter

3.4 Bemerkung Es mag zunächst willkürlich wirken, dass wir zwei verschiedene Referenzwerte für die charakteristische Funktion $\tilde{\chi}$ wählen. Der Grund dafür liegt darin, dass wir die Impulsbilanz nach der Asymptotik über die Länge des Auspuffrohres integrieren. Die Integration ist notwendig um das Modell mit dem später gewählten Satz von Anfangs- und Randbedingungen kompatibel zu machen. Der dabei auftretende Beitrag von $\tilde{\chi}$ ist nicht besonders groß, da der Wert von $\tilde{\chi}$ nur auf den Katalysator-Intervallen nicht verschwindet. Diese haben nach Tabelle 3.1 die Länge $(\tilde{x}_4 - \tilde{x}_3) + (\tilde{x}_8 - \tilde{x}_7) = 0.15m$. Da die Gesamtlänge des Auspuffs $L = 3.6m$ beträgt, ist der Erwartungswert von $\tilde{\chi}$

$$\int_0^{3.6} \tilde{\chi}(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{1}{24}.$$

Somit ergibt sich der erste Referenzwert für $\tilde{\chi}$. Zwar haben wir mit der Regel gebrochen, Referenzwerte so zu wählen, dass die dimensionslose Variable Größenordnung 1 aufweist, dies stellt aber aufgrund der späteren Integration kein Problem dar.

Die Wahl des zweiten Referenzwertes $\chi_r^{(2)}$ ist die natürlichere. Da wir die Reaktionsgleichung

später nicht integrieren werden, machen wir von dem Fakt, dass der Beitrag der charakteristischen Funktion auf dem Gesamtintervall relativ gering ist, keinen Gebrauch.

Festzuhalten bleibt, dass die Wahl der Referenzwerte keinen echten Einfluss auf das Gleichungssystem (3.6) hat. Wir könnten genauso gut von $\chi_r^{(2)} = 1$ absehen und nur mit $\chi_r^{(1)} = 1/24$ rechnen. Dies würde allerdings bei der späteren asymptotischen Betrachtung dazu führen, dass wir in einer Gleichung (der Reaktionsgleichung) im Hinterkopf behalten müssten, dass die skalierte Variable χ eine höhere Größenordnung aufweist und nicht wie bei der Impulsbilanz durch Integration zu 1 wird.

3.5. Machzahl-Asymptotik

In unserem skalierten Gleichungssystem (3.6) sind die in Klammern gefassten dimensionslosen Faktoren bekannt. Da wir alle unsere Referenzgrößen so gewählt haben, dass unsere dimensionslosen Variablen Größenordnung 1 haben, geben uns die Größenordnungen der geklammerten Vorfaktoren Aufschluss darüber, wie groß in etwa der Betrag der einzelnen Terme ist. Sollten einige Terme einen sehr kleinen Vorfaktor haben, könnte es sinnvoll sein, diese Terme für eine leichtere numerische Umsetzung zu "opfern". Sollte umgekehrt einer der Vorfaktoren sehr groß sein, kann es sinnvoll sein, diesen getrennt zu behandeln und die sich daraus ergebenden Resultate dem verbleibenden Gleichungssystem zukommen zu lassen. Dies geschieht formal durch eine Grenzwertbetrachtung, die sogenannte *kleine Machzahl-Asymptotik*.

Die Machzahl M ist das Verhältnis zwischen der in System typischen Geschwindigkeit (in unserem Fall also die Referenzgeschwindigkeit u_r) und der Schallgeschwindigkeit c des Systems.

$$M = \frac{u_r}{c}$$

Die Schallgeschwindigkeit eines idealen Gases hängt, von der Dichte (ρ_r) und dem vorherrschenden Druck (p_r) ab. Die genau Beziehung lautet nach [Ris96]

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_r}{\rho_r}},$$

wobei γ für den *Isentropenexponenten* steht. Somit berechnet sich die Machzahl M aus der Geschwindigkeit, dem Druck und der Dichte.

$$M = u_r \sqrt{\frac{\rho_r}{\gamma p_r}}$$

Da $M \approx 1/10 < 1$ ist sprechen wir von *kleinen Machzahlen*. So taucht in dem skalierten Gleichungssystem (3.6) unter anderem in der Energiebilanz der Faktor

$$\varepsilon := (\gamma M^2) = \rho_r u_r^2 / p_r \approx 10^{-2}$$

auf. In der Tabelle 3.4 untersuchen wir die Größenordnung aller Vorfaktoren in (3.6), deren Komponenten aus den Tabellen 3.3 und 3.2 bekannt sind.

Vorfaktoren	Größenordnung
$\frac{p_r}{\rho_r u_r^2}$	10^2
$\frac{C_f^{K/D} w_r x_r}{A_r}$	10^{-1}
$\frac{C_f^{sonst} w_r x_r}{A_r}$	$10^{-1} - 1$
$\frac{C \chi_r^{(1)} x_r}{u_r}$	1
$\frac{\rho_r u_r^2 R}{p_r c_v}$	$10^{-3} - 10^{-2}$
$\frac{\rho_r z_r q_0 R}{p_r c_v}$	$10^{-1} - 1$
$\frac{w_r x_r h}{c_v \rho_r A_r u_r}$	1
$\frac{K_0 \chi_r^{(2)} x_r}{u_r}$	10

Tabelle 3.4.: Größenordnungen der Vorfaktoren

Man kann anhand der Werte in Tabelle 3.4 erkennen, dass es einige Vorfaktoren in den Gleichungen gibt, die hohe beziehungsweise niedrige Größenordnungen aufweisen. Es könnte also sein, dass die Terme welche Vorfaktoren mit hohen oder niedrigen Größenordnungen haben, eine wichtige beziehungsweise vernachlässigbare Rolle im Gleichungssystem spielen. Daher könnte es Sinn machen die Terme welche niedrige Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ haben, zu vernachlässigen und Terme mit hoher Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ getrennt zu betrachten. Den Rest der Gleichungen, welche aus Termen der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ bestehen, betrachtet man nach wie vor zusammen in den verbleibenden Gleichungen.

Dieses soeben beschriebene Verfahren führen wir mathematisch formal durch, indem wir unsere Zustandsgrößen y asymptotisch in ε entwickeln.

Wir entwickeln zunächst nur den Druck p in ε . Da wir keine großen Druckänderungen in der Zeit erwarten, wählen wir die Entwicklung der Art, dass der *Grunddruck* p_0 unabhängig von der Zeit sein soll. Somit erhalten wir die asymptotische Entwicklung

$$p(x, t) = p_0(x) + \varepsilon p_1(x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Formal entwickeln wir jede unbekannte Variable auf diese Art und Weise (jedoch ohne die zusätzliche Annahme, dass die Variable in der nullten Ordnung nicht zeitabhängig sein soll). Jedoch steht vor keiner anderen Variablen außer p ein Faktor der Größenordnung ε^{-1} , der den Term erster Ordnung (ρ_1, u_1, z_1 , oder T_1) in der Entwicklung interessant machen würde. Da wir die Betrachtung nur in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ und $\mathcal{O}(1)$ durchführen, verzichten wir auf unnötige Indizes und schreiben ρ, u, z und T wie immer.

Wir setzen also nun die Entwicklung des Druckes p in das Gleichungssystem ein und sortieren die Gleichungen nach den Größenordnungen ε^{-1} beziehungsweise $\varepsilon^0 = 1$.

- In der **Massenbilanz** haben wir nur Terme der Größenordnung 1, weshalb sich diese Gleichung nicht weiter vereinfacht.

$$\boxed{(A\rho)_t + (A\rho u)_x = 0} \quad (3.7)$$

- In der **Impulsbilanz** gibt es einen Term der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Daraus ergibt sich für diese Ordnung folgender Zusammenhang

$$Ap_{0x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{0x} = 0.$$

Der Grunddruck $p_0(x)$ ist also in x konstant. Da p_0 bereits per Annahme auch in t konstant ist, erhalten wir für alle x und t einen konstanten Grunddruck.

In der nullten ε -Ordnung erhalten wir folgende Gleichung:

$$\boxed{(A\rho u)_t + (A\rho u^2)_x + Ap_{1x} = -F_0 w \rho \frac{u^2}{2} - F_{\text{Kat}} A \chi^{(1)} \rho u}, \quad (3.8)$$

wobei

$$F_0 = \frac{C_f w_r x_r}{A_r} \quad \text{und} \quad F_{\text{Kat}} = \frac{C \chi_r^{(1)} x_r}{u_r}$$

die Koeffizienten der Reibungsterme darstellen.

- Bei der **Reaktionsgleichung** müssen wir zunächst noch eine kleine Vorüberlegung machen, da wir mit $T \mapsto K(T)$ noch eine nicht-lineare Abbildung haben. Wir ersetzen T mit $T_0 + \varepsilon T_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ und führen eine Taylor-Entwicklung von $K(T_0 + \varepsilon T_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))$ um T_0 durch.

$$\begin{aligned} K(T_0 + \varepsilon T_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) &= K(T_0) + K'(T_0)(T_0 + \varepsilon T_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) - T_0) + \dots \\ &= \exp\left(\frac{-E^+}{T_r T_0}\right) + \exp\left(\frac{-E^+}{T_r T_0}\right) \frac{E^+}{T_r T_0^2} (\varepsilon T_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) + \dots \end{aligned}$$

Da E^+/T_r Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ hat, ist für die Ordnung $\varepsilon^0 = 1$ nur der erste Term in der Taylorentwicklung relevant. Für die nullte ε -Ordnung in der Reaktionsgleichung erhalten wir (mit der Notation T statt T_0) folglich

$$\boxed{(A\rho z)_t + (A\rho u z)_x = -R_0 A \chi^{(2)} \rho z K(T)}, \quad (3.9)$$

wobei

$$R_0 = \frac{K_0 \chi_r^{(2)} x_r}{u_r}$$

den Koeffizienten des Reaktionsterms bezeichnet.

- Für das **ideale Gasgesetz** folgt sofort

$$\boxed{p_0 = \rho T}. \quad (3.10)$$

- In der **Energiebilanz** fallen zwei Terme weg, nämlich jene die den Transport der kinetischen Energie darstellen. Wir erhalten durch Einsetzen

$$\begin{aligned} (A\rho T)_t + E_0(A\rho z)_t + (A\rho u T)_x + E_0(A\rho u z)_x + \frac{R}{c_v}(Aup_0)_x \\ = -H_0 w(T - T_{\text{Wand}}), \end{aligned}$$

wobei

$$E_0 = \frac{\rho_r z_r q_0 R}{p_r c_v} \quad \text{und} \quad H_0 = \frac{w_r x_r h}{c_v \rho_r A_r u_r}$$

für die Koeffizienten der Wärmezufuhr durch die Verbrennung des Restkraftstoffs beziehungsweise für den Wärmeabgabekoeffizienten stehen. Benutzt man die Information aus der nullten ε -Ordnungen der Reaktionsgleichung (3.9) und des Idealen Gasgesetzes (3.10), erhält man folgende Gleichung

$$(Ap_0)_t + (Aup_0)_x + \frac{R}{c_v}(Aup_0)_x = -H_0(T - T_{\text{Wand}}) + E_0 R_0 A \chi^{(2)} \rho z K(T).$$

Mit $R/c_v = \gamma - 1$ und dem Wissen, dass p_0 weder von x noch von t abhängt, schreiben wir letztendlich noch

$$\boxed{(Au)_x = \frac{1}{\gamma p_0}(-H_0 w(T - T_{\text{Wand}}) + E_0 R_0 A \chi^{(2)} \rho z K(T))}. \quad (3.11)$$

Nach der soeben durchgeführten Asymptotik, welche ihren Ursprung in der kleinen Machzahl des Systems hatte, erhalten wir aus dem Gleichungen (3.7)-(3.11) unser neues vereinfachtes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} (A\rho)_t + (A\rho u)_x &= 0 \\ (A\rho u)_t + (A\rho u^2)_x + Ap_{1x} &= -F_0 w \rho \frac{u^2}{2} - F_{\text{Kat}} A \chi^{(1)} \rho u \\ (Au)_x &= \frac{1}{\gamma p_0}(-H_0 w(T - T_{\text{Wand}}) + E_0 R_0 A \chi^{(2)} \rho z K(T)) \\ (A\rho z)_t + (A\rho u z)_x &= -R_0 A \chi^{(2)} \rho z K(T) \\ p_0 &= \rho T \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.6. Anfangs- und Randbedingungen

Wir möchten nun einen Satz von Anfangs- und Randbedingungen vorschreiben, um unser Modell zu vervollständigen. Die in [LN04] vorgeschriebenen Anfangsbedingungen lauten

$$\boxed{\rho(x, 0) = \rho^a(x) \quad u(x, 0) = u^a(x) \quad z(x, 0) = z^a(x)} \quad (3.13)$$

für alle $x \in (0, 1)$.

Im Allgemeinen schreibt man je nach Strömungsrichtung am Rand, den linken oder rechten Randwert für die Dichte beziehungsweise Restmenge Kraftstoff vor. Da wir in unserem System jedoch stets eine positive Strömungsrichtung (also $u(x, t) > 0$ für alle $x \in [0, 1]$ und $x \in (0, \infty)$) erwarten können, schreiben wir auch stets Werte am linken Rand vor.

Bei $x = 0$ (also bei Übergang von Motor zum Auspuff) wurden *Dirichlet*-Randbedingungen für Dichte, Druck, Restmenge Kraftstoff und Geschwindigkeit vorgeschrieben

$$\rho(0, t) = \rho^l(t) \quad p(0, t) = p^l(t) \quad u(0, t) = u^l(t) \quad z(0, t) = z^l(t).$$

Die Randbedingung für die Geschwindigkeit erscheint aus zwei Gründen nicht besonders sinnvoll zu sein. Erstens ist die Geschwindigkeit, mit der das Gasgemisch den Motor verlässt und in das Auspuffrohr strömt, schwer messbar. Zweitens ist eine Druckdifferenz die physikalische Ursache für eine Strömung. Somit wäre es physikalisch sinnvoller statt einer Randbedingung für die Geschwindigkeit eine zweite Randbedingung am Rohrende für den Druck vorzuschreiben.

Die Randbedingungen, die wir für die Simulation unseres Modells verwenden werden, lauten also

$$\boxed{\rho(0, t) = \rho^l(t) \quad z(0, t) = z^l(t) \quad p(0, t) = p^l(t) \quad p(1, t) = p_{ex}}, \quad (3.14)$$

wobei p_{ex} für den konstanten skalierten Außendruck steht. Wir setzen den Grunddruck p_0 gleich dem konstanten Außendruck $p_{ex} = 1$. Somit folgt für die Randwerte für den Druck in erster Ordnung p_1 , wobei wir Ordnungen in ε oder höher vernachlässigen.

$$p_1(0, t) = \frac{p^l(t) - p_0}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad p_1(1, t) = 0$$

3.5 Bemerkung Da wir uns bei den Simulationen insbesondere für den Start des Motors interessieren, werden die Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeit und die Restmenge Kraftstoff verschwinden ($u^a(x) = z^a(x) = 0$). Die Anfangsbedingung für die Dichte wird der Außendichte entsprechen, welche nach Annahme konstant ist ($\rho^a(x) = \rho_{ex} = 1$).

3.7. Umformulierung des Modells

Da unser Gleichungssystem aus partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung besteht, sind die gewählten Randdaten (insbesondere die zwei Randbedingungen an den Druck) mit der aktuellen Formulierung des Modells (3.12) nicht kompatibel. Damit unser Modell mit den Randdaten (3.14) vereinbar ist, müssen wir unsere Gleichungen noch umformulieren. Dafür gibt es unter Anderem folgende zwei Möglichkeiten:

1. Man differenziert die Impulsbilanz nach x um eine elliptische Gleichung in p_1 zu erhalten. Diese könnte beide Randbedingungen an p_1 erfüllen. Das neue Gleichungssystem

lautet:

$$\begin{aligned}
(A\rho)_t + (A\rho u)_x &= 0 \\
(A\rho u)_t + (A\rho u^2)_x + Ap_{1x} &= -F_0 w \rho \frac{u^2}{2} - F_{\text{Kat}} A \chi^{(1)} \rho u \\
(\rho u_t)_x + (\rho u u_x)_x + p_{1xx} &= -F_0 \left(\frac{1}{r} \rho \frac{u^2}{2} \right)_x - F_{\text{Kat}} \chi^{(1)} (\rho u)_x \\
(Au)_x &= \frac{1}{\gamma p_0} (-H_0 w (T - T_{\text{Wand}}) + E_0 R_0 A \chi^{(2)} \rho z K(T)) \\
(A\rho z)_t + (A\rho u z)_x &= -R_0 A \chi^{(2)} \rho z K(T) \\
p_0 &= \rho T
\end{aligned} \tag{3.15}$$

2. Man integriert die Impulsbilanz über das Intervall $[0, 1]$ nach x . Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man für den Druckterm

$$\int_0^1 p_{1x}(x, t) dx = p_1(1, t) - p_1(0, t) = -\frac{p^l(t) - p_0}{\varepsilon}.$$

Im Folgenden werden wir die zweite Möglichkeit der Umformulierung verfolgen. Grund dafür ist, dass eine Integration numerisch "einfacher" ist und man zusätzlich die glättende Eigenschaft der Integration nutzen kann, wohingegen man bei der ersten Variante zusätzliche Glattheit fordern müsste. Bevor wir jedoch die Impulsbilanz einfach integrieren bedarf es zuvor einer Vorüberlegung.

Wir betrachten dazu die Energiebilanz nach der Asymptotik:

$$\begin{aligned}
(Au)_x &= \frac{1}{\gamma p_0} (-H_0 w (T - T_{\text{Wand}}) + E_0 R_0 A \chi^{(2)} \rho z K(T)) \\
&=: q(\rho, z, T)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Integrieren wir die Gleichung über x so erhalten wir

$$\begin{aligned}
Au &= v(t) + \int_0^x q(\rho(y, t), z(y, t), T(y, t)) dy \\
&=: v(t) + Q(x, t)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Wir ersetzen nun das Produkt aus Geschwindigkeit und Querschnittsfläche $A(x)u(x, t)$ durch die Summe aus zeitabhängiger Integrationskonstante $v(t)$ und einer Funktion $Q(x, t)$, welche den akkumulierten Wärmehaushalt und die freigewordene Verbrennungsenergie bis zur Stelle x zum Zeitpunkt t darstellt.

- Für die **Massenerhaltung** berechnet man

$$\boxed{\rho_t + \frac{v + Q}{A} \rho_x = -\frac{q}{A} \rho}. \tag{3.18}$$

- Für die **Reaktionsgleichung** erhält man mit der Massenerhaltung

$$\boxed{z_t + \frac{v+Q}{A}z_x = -R_0\chi^{(2)}zK(T)}. \quad (3.19)$$

- Einsetzen von (3.16) und (3.17) in die **Impulsbilanz** liefert zunächst

$$\begin{aligned} (A\rho u)_t + (A\rho u^2)_x + Ap_{1x} &= -F_0w\rho\frac{u^2}{2} - F_{\text{Kat}}A\chi^{(1)}\rho u \\ \Leftrightarrow (v+Q)_t\rho + \frac{v+Q}{A}q\rho &= -Ap_{1x} + \frac{A_x}{A^2}(v+Q)^2\rho - F_0\frac{w}{A^2}\rho\frac{(v+Q)^2}{2} \\ &\quad - F_{\text{Kat}}\chi^{(1)}\rho(v+Q) \end{aligned}$$

Wir dividieren durch die Querschnittsflächenfunktion A und integrieren in x über das Intervall $(0, 1)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert das Integral über den Druckterm p_{1x} die Randwerte. Da die Integrationskonstante $v(t)$ nur von der Zeit abhängt und nicht vom Ort, kann man v aus dem Integral herausziehen.

$$\boxed{v_t = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{A}\rho dx} \left[-p(1, t) + p(0, t) - \int_0^1 \frac{Q_t\rho}{A} dx - \int_0^1 \frac{q(v+Q)\rho}{A^2} dx - \int_0^1 F_{\text{Kat}} \frac{\chi^{(1)}(v+Q)\rho}{A} dx - \int_0^1 F_0 \frac{w}{A^3} \rho \frac{(v+Q)^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{A_x}{A^3} \rho (v+Q)^2 dx \right]} \quad (3.20)$$

Wir müssen noch erklären wie der Term Q_t aussieht. Unter zusätzlichen Annahmen, die uns erlauben die Differentiation nach t mit der Integration in x zu vertauschen (zum Beispiel stetig partielle Differenzierbarkeit von ρ, z und T), folgt:

$$Q_t = \int_0^x \frac{\partial q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} dy,$$

wobei die verschiedenen partiellen Ableitungen von q sich wie folgt errechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \rho} &= \frac{1}{\gamma p_0} E_0 R_0 A \chi^{(2)} z K(T) \\ &=: b(z, T), \\ \frac{\partial q}{\partial z} &= \frac{1}{\gamma p_0} E_0 R_0 A \chi^{(2)} \rho K(T) \\ &=: c(\rho, T), \\ \frac{\partial q}{\partial T} &= \frac{1}{\gamma p_0} (-H_0 w + E_0 R_0 A \chi^{(2)} \rho z K'(T)) \\ &=: d(\rho, z, T). \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich aus (3.18) und (3.19) sowie der Differentialgleichung für v (3.20), die endgültige Formulierung unseres Modells, welche mit den Randbedingungen kompatibel ist.

$$\begin{aligned}
 \rho_t + \frac{v+Q}{A}\rho_x &= -\frac{q}{A}\rho \\
 z_t + \frac{v+Q}{A}z_x &= -R_0\chi^{(2)}zK(T) \\
 v_t &= \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{A}\rho dx} \left[\frac{p^l - p_0}{\varepsilon} - \int_0^1 \int_0^x (b\rho_t + cz_t + dT_t dy) \frac{\rho}{A} dx - \int_0^1 \frac{q(v+Q)\rho}{A^2} dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^1 F_{\text{Kat}} \frac{\chi^{(1)}(v+Q)\rho}{A} dx - \int_0^1 F_0 \frac{w}{A^3} \rho \frac{(v+Q)^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{A_x}{A^3} \rho (v+Q)^2 dx \right] \\
 T &= \frac{p_0}{\rho}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Wir haben also nur noch zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für ρ und z und eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit für v . Der Druck taucht nur als bereits bekannter Randterm $(p^l(t) - p_0)/\varepsilon$ in der Gleichung für v beziehungsweise als Konstante p_0 im idealen Gasgesetz und in den Variablen q und Q auf. Als "echte" Randdaten brauchen wir nur noch

$$\boxed{\rho(0, t) = \rho^l(t) \quad \text{und} \quad z(0, t) = z^l(t)} \tag{3.22}$$

und für die Anfangsbedingungen

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(x, 0) &= \rho^a(x) \\ z(x, 0) &= z^a(x) \\ v(0) &= v^a. \end{aligned}} \tag{3.23}$$

Die Anfangsbedingung für v ergibt sich aus der ursprünglichen Anfangsbedingung von u sowie ρ^a , z^a und T^a , wobei sich letztere aus dem idealen Gasgesetz errechnet.

$$v(0) = \int_0^1 A(x)u^a(x)dx - \int_0^1 \int_0^x q(\rho^a(y), z^a(y), T^a(y))dydx$$

3.6 Bemerkung Da wir in der Regel einen Motorstart simulieren, haben wir die Anfangsbedingungen $u^a = z^a = 0$ und die Temperatur gleich der Außentemperatur und deshalb folgt

$$z^a = 0 \quad \text{und} \quad T^a = T_{ex} \quad \Rightarrow \quad q(\rho^a, z^a, T^a) = 0$$

Also ergibt sich für den Kaltstart eines Motors eine Anfangsbedingung $v(0) = 0$.

3.8. Stationäre Lösungen

Unter Ausschluss aller äußeren Einflüsse außer der Wandreibung, lassen sich für das zeitunabhängige, stationäre Problem analytische Aussagen zum Lösungsverhalten machen. Das betrachtete Modell vereinfacht sich zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}
 (A\rho u)_x &= 0 \\
 (A\rho u^2)_x + Ap_{1x} &= -F_0 w \rho \frac{u^2}{2} \\
 (\rho u u_x)_x + p_{1xx} &= -F_0 \left(\frac{1}{r} \rho \frac{u^2}{2} \right)_x \\
 (Au)_x &= 0 \\
 (A\rho u z)_x &= 0 \\
 p_0 &= \rho T
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Als Randwerte geben wir eine Dichte (ρ^l), einen Anteil an unverbranntem Kraftstoff (z^l) und zwei Randdrücke (p^l sowie $p_{ex} = p_0$) vor. Durch die Vorgabe der Randdaten können wir das stationäre Problem (3.24) eindeutig lösen.

Zunächst erhalten wir für die Geschwindigkeit u aus der vierten Gleichung

$$u = \frac{c_u}{A} = \frac{c_u}{r^2} \tag{3.25}$$

mit $c_u = \text{const.}$ Ob c_u verschwindet hängt von den Randbedingungen an den Druck ab. Wäre $c_u = 0$ so folgt aus der zweiten Gleichung, dass p_1 konstant wäre. Somit ließen sich zwei verschiedene Randdaten an p_1 nicht verwirklichen. Da wir aber stets von unterschiedlichen Randwerten für den Druck ausgehen werden, können wir davon ausgehen, dass c nicht verschwindet und erhalten durch Einsetzen von (3.25) in die Massenerhaltung

$$\rho_x = 0 \Rightarrow \rho = \rho^l = \text{const.}$$

Analog erhalten wir $z = z^l$ für den Anteil an unverbranntem Kraftstoff. Die Lösung für T erhalten wir sofort aus dem idealen Gasgesetz. Es bleibt noch die Lösung und den Wert für p_1 beziehungsweise die Konstante c_u zu bestimmen.

Einsetzen der Gleichung (3.25) und der bekannten Lösung für ρ in die Differentialgleichung zweiter Ordnung für p_1 liefert

$$\begin{aligned}
 p_{1xx} &= \rho^l c_u^2 \frac{2rr_{xx} - 10r_x^2 + \frac{5}{2}F_0 r_x}{r^6} \\
 &=: \rho^l c_u^2 g.
 \end{aligned}$$

Durch zweifache Integration erhalten wir

$$p_1(x) = k_2 + k_1 \cdot x + \rho^l c_u^2 \int_0^x \int_0^y g(\xi) d\xi dy,$$

wobei sich die Integrationskonstanten k_1 und k_2 mit Hilfe der Randbedingungen bestimmen lassen.

$$k_2 = \frac{p^l - p_0}{\varepsilon}$$

$$k_1 = -\frac{p^l - p_0}{\varepsilon} - \rho^l c_u^2 \int_0^1 \int_0^y g(\xi) d\xi dy$$

Schließlich wollen wir noch die Konstante c_u bestimmen. Diese kann durch die Impulsbilanz errechnet werden. Durch Einsetzen der (bis auf dieselbe multiplikative Konstante) bekannten Lösungen für p_1 und u erhalten wir

$$-\rho^l c_u^2 \frac{2r_x}{r^5} - \frac{p^l - p_0}{\varepsilon} - \rho^l c_u^2 \int_0^1 \int_0^y g(\xi) d\xi dy + \rho^l c_u^2 \int_0^x g(y) dy = -\frac{1}{2} \rho^l c_u^2 F_0 \frac{1}{r^5}$$

Integration über das Intervall $[0, 1]$ liefert

$$\begin{aligned} -\rho^l c_u^2 \int_0^1 \frac{2r_x(x)}{r(x)^5} dx - \frac{p^l - p_0}{\varepsilon} - \rho^l c_u^2 \int_0^1 \int_0^y g(\xi) d\xi dy + \rho^l c_u^2 \int_0^1 \int_0^x g(y) dy dx & \quad (3.26) \\ & = -\frac{1}{2} \rho^l c_u^2 \int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^5} dx. \end{aligned}$$

Die Doppelintegralterme sind bis auf Vorzeichen identisch und heben sich gegenseitig weg. Das Integral über $2r_x/r^5$ ist wegen der Stammfunktion $-1/2r^4$ in unserem Fall Null⁸. Somit erhalten wir durch Umstellung der restlichen Terme nach c_u die folgende Beziehung

$$c_u = \sqrt{\frac{2(p^l - p_0)}{\varepsilon \rho^l \int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^5} dx}}. \quad (3.27)$$

Die stationären Lösungen des Gleichungssystems (3.24) auf dem Intervall $[0, 1]$ lauten

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho^l \\ z(x) &= z^l \\ u(x) &= \sqrt{I_F^r \cdot \frac{2(p^l - p_0)}{\varepsilon \rho^l}} \cdot \frac{1}{r(x)^2} \\ p_1(x) &= \frac{p^l - p_0}{\varepsilon} \left[1 - \left(1 + I_F^r \cdot \int_0^1 \int_0^y g(\xi) d\xi dy \right) \cdot x + I_F^r \cdot \int_0^x \int_0^y g(\xi) d\xi dy \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

⁸Für ein Rohr dessen Durchmesser an der Stelle $x = 0$ sich von dem Durchmesser an Stelle $x = 1$ unterscheidet, wäre dies nicht der Fall.

wobei die Funktion g und die Konstante I_F^r wie folgt definiert wurden:

$$g(x) := \frac{2r(x)r_{xx}(x) - 10r_x(x)^2 + \frac{5}{2}F_0r_x(x)}{r(x)^6}$$

$$I_F^r := \frac{1}{\int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^5} dx}$$

Die Verläufe der interessanten Lösungen u und p sind in der Abbildung 3.6 beziehungsweise 3.7 dargestellt. Die Bilder wurden mit Hilfe des mit MATLAB geschriebenen Programms `stationaerloesungen.m` erstellt. Dabei wurden die Werte der Integrale durch die Trapezregel approximiert. Als dimensionsbehaftete Randdaten wurden folgende Werte verwendet:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^l &= 0.4148 \text{ kg m}^{-3} & \tilde{p}^l &= 1.015 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ \tilde{z}^l &= 0.01 & \tilde{p}_0 &= 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} \end{aligned}$$

3.7 Bemerkung

1. Da wir für diese Rechnung zweifache Differenzierbarkeit der Radiusfunktion r benötigen, wurde zusätzlich die Gleichheit der zweiten Ableitungen an den Schnittstellen gefordert. Dies führt zu einem Polynom der Ordnung fünf, welches in dem Programm `stationaerloesungen.m` implementiert wurde.
2. Für ein Rohr mit konstantem Querschnitt würden sich die Lösungen dahingehend vereinfachen, als dass die Geschwindigkeit u überall konstant wäre und der Druck p eine lineare Funktion zwischen den Randwerten p^l und $p^r = p_0$ wäre.
3. Stationäre Lösungen für ein Modell ohne Wandreibung ließen sich auf diese Weise nicht gewinnen. Dies sieht man an den Gleichungen (3.26) beziehungsweise (3.27). Wäre der Wandreibungsterm $F_0 = 0$, so würde aus der Gleichung (3.26) der Widerspruch $p^l = p^r$ folgen.
Physikalisch macht die Notwendigkeit der Wandreibung, um sinnvolle Lösungen zu erhalten, auch Sinn. Durch die Druckdifferenz hätten wir stets eine konstante Beschleunigung des Gases, die nicht durch die Rohrreibung gebremst werden würde. Somit würde die Geschwindigkeit gegen Unendlich divergieren und es gäbe keine physikalisch sinnvolle Lösung.
4. In der Abbildung 3.6 hat es den Anschein, dass der Druck in den Rohrstücken mit größerer Querschnittsfläche konstant ist. Dies ist aber nicht der Fall. Die Lösung ist weiterhin (mit Ausnahme der Übergänge zwischen verschiedenen Rohrstücken) stückweise streng monoton fallend.

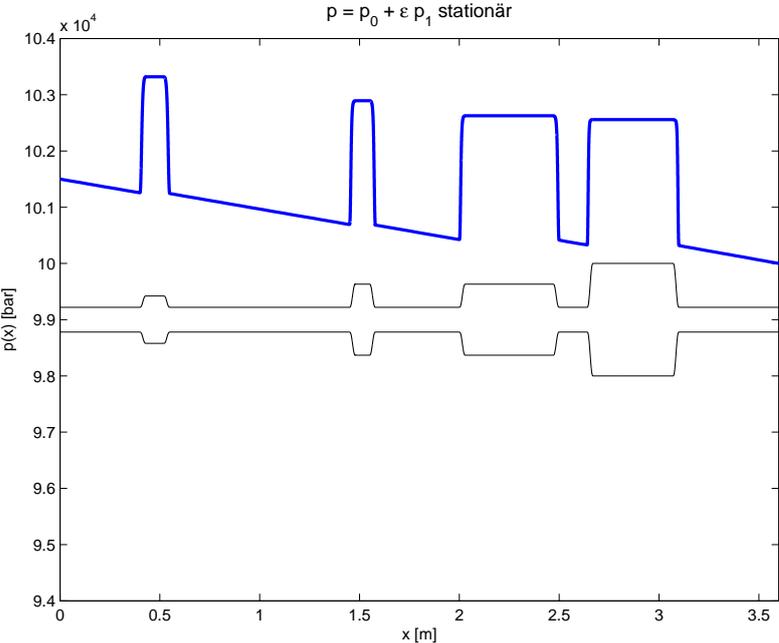


Abbildung 3.6.: Stationäre Lösung von p

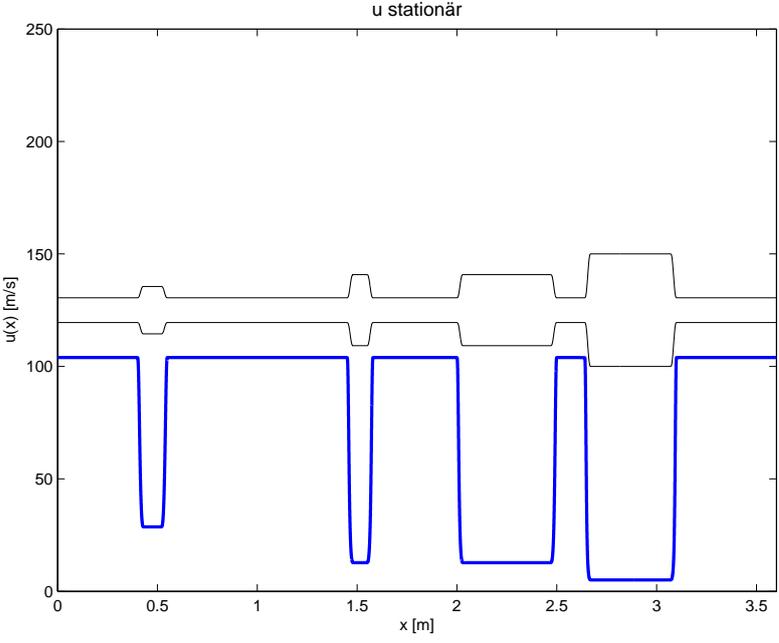


Abbildung 3.7.: Stationäre Lösung von u

3.8.1. Stationäre Lösung mit Katalysatorreibung

Betrachten wir nun das stationäre Problem unter Berücksichtigung der Rohrwand- und Katalysatorreibung.

$$\begin{aligned}
 (A\rho u)_x &= 0 \\
 (A\rho u^2)_x + Ap_{1x} &= -F_0 w \rho \frac{u^2}{2} - F_{\text{Kat}} \chi^{(1)} A\rho u \\
 (\rho u u_x)_x + p_{1xx} &= -F_0 \left(\frac{1}{r} \rho \frac{u^2}{2} \right)_x - F_{\text{Kat}} \chi^{(1)} (\rho u)_x \\
 (Au)_x &= 0 \\
 (A\rho u z)_x &= 0 \\
 p_0 &= \rho T
 \end{aligned}$$

Analog zum Fall ohne Katalysatorreibung, erhalten wir durch einfache Rechnungen die Lösungen

$$\begin{aligned}
 \rho(x) &= \rho^l \\
 z(x) &= z^l \\
 u(x) &= c_u \cdot \frac{1}{r(x)^2} \\
 p_1(x) &= \frac{p^l - p_0}{\varepsilon} - \left[\frac{p^l - p_0}{\varepsilon} + \rho^l c_u^2 \int_0^1 \int_0^y g(\xi) d\xi dy \right] \cdot x + \rho^l c_u^2 \int_0^x \int_0^y g(\xi) d\xi dy,
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 I_1 &:= \int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^5} dx \\
 I_2 &:= F_{\text{Kat}} \int_0^1 \frac{\chi^{(1)}}{r(x)^2} dx \\
 I &:= \frac{I_2}{I_1} \\
 c_u &:= -I + \sqrt{\frac{2(p^l - p_0)}{\varepsilon \rho^l \int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^5} dx} + I^2} \\
 g &:= \frac{2r(x)r_{xx}(x) - 10r_x(x)^2 + \frac{5}{2}F_0r_x(x) + \frac{2F_{\text{Kat}}}{x_u}r(x)^3r_x(x)}{r(x)^6}.
 \end{aligned}$$

Mit den gleichen Randdaten wie beim Beispiel zuvor, erhalten wir die folgenden Lösungen, welche ebenfalls mit dem Programm `stationaerloesungen.m` dargestellt wurden.

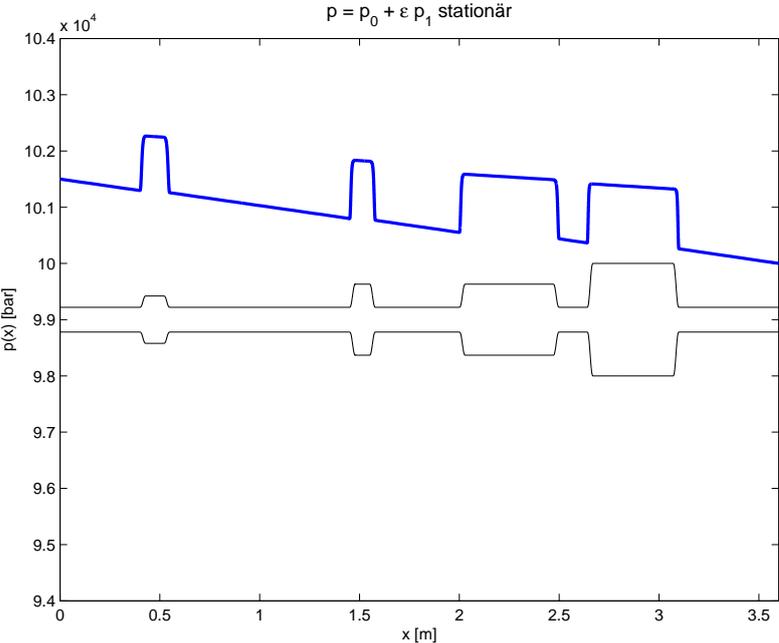


Abbildung 3.8.: Stationäre Lösung von p mit Katalysatorreibung

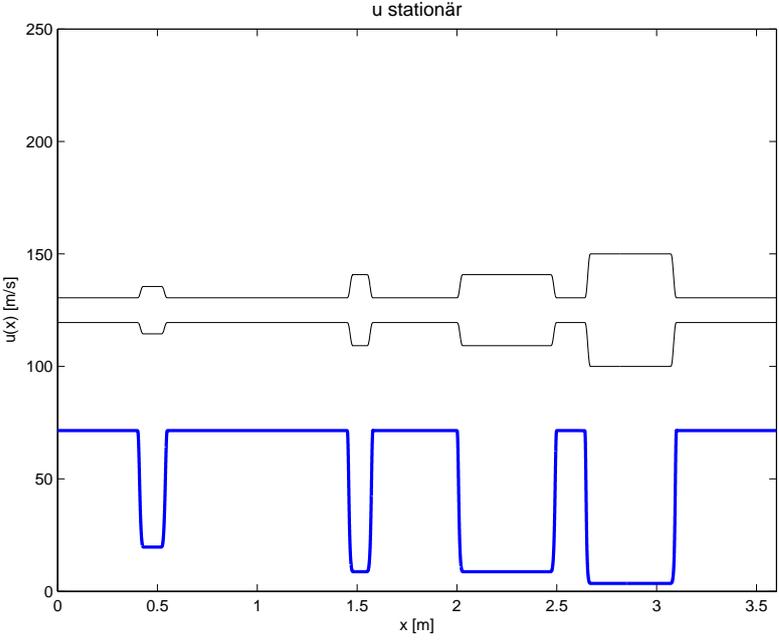


Abbildung 3.9.: Stationäre Lösung von u mit Katalysatorreibung

4. Numerik und Simulationsergebnisse

4.1. Numerik

Für die numerische Simulation des Gleichungssystems (3.21) verwenden wir *Finite Differenzen Verfahren*. Dabei wird statt der tatsächlichen Lösung (sofern überhaupt eine (eindeutige) Lösung existiert) eine Näherungslösung auf Basis von endlichen vielen Stützstellen errechnet. Die in dem System von partiellen Differentialgleichungen auftauchenden Ableitungen werden durch geeignete Differenzen der Näherungslösungen in den gewählten Gitterpunkten ersetzt.

4.1.1. Numerische Verfahren

Bei einem ähnlichen Satz von Gleichungen in [Bau10] haben sich die beiden folgenden Verfahren bewährt.

Explizites Euler Verfahren

Das *explizite Euler-Verfahren* ist das einfachste numerische Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems der Form

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t), \quad y(0) = y^a \quad (4.1)$$

für Werte $t \in (0, T]$. Man überzieht das Zeitintervall mit einem regulären Gitter aus $N \in \mathbb{N}$ Gitterpunkten $t^n = (n \cdot \Delta_t)$ mit Schrittweite $\Delta_t > 0$. Der folgende Algorithmus liefert nun eine Näherungslösung für das Problem (4.1):

$$\begin{aligned} y^0 &= y^a \\ y^{n+1} &= y^n + \Delta_t \cdot f(t^n, y^n) \quad \text{für } n = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

wobei y^n die Näherungslösung von $y(t^n)$ bezeichnen soll. Da alle Werte die zur Berechnung der Näherungslösung y^{n+1} an der Stützstelle t^{n+1} benötigt werden, bekannt sind und y^{n+1} selbst nicht auf der rechten Seite der Gleichung (4.2) auftaucht, handelt es sich um ein explizites Verfahren. Die Herleitung des expliziten Euler-Verfahrens beruht auf der Approximation der Ableitung durch Vorwärtsdifferenzen.

$$\dot{y}(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\Delta_t}$$

4.1 Bemerkung Das explizite Euler-Verfahren hat Konsistenzordnung 1 und ist stabil für Lipschitz-stetiges f .

Upwind-Verfahren

Das *Upwind-Verfahren* ist ein einfaches numerisches Verfahren zur Lösung eines hyperbolischen Anfangs-Randwertproblems der Form

$$\begin{aligned} y_t + a(x, t)y_x &= b(x, t, y) \\ y(x, 0) &= y^a(x) \\ y(0, t) &= y_l(t) && \text{falls } a(0, t) > 0 \\ y(1, t) &= y_r(t) && \text{falls } a(1, t) < 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

für $(x, t) \in \Omega := (0, 1) \times (0, \infty)$. Die eindimensionale semilineare partielle Differentialgleichung in (4.3) wird häufig zur Beschreibung von Phänomenen mit einem Strömungs- und Informationstransport verwendet. Dabei beschreibt die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t) \quad (4.4)$$

den Verlauf der Charakteristiken von (4.3). Die Geschwindigkeit dieser Ausbreitung (also die Ableitung von $x(t)$ nach der Zeit t) ist nach (4.4) gerade $a(x, t)$. Somit gibt ein das Vorzeichen von a Aufschluss über die Richtung des Informationsflusses. Dies ist auch der Grund dafür, weshalb man je nach Vorzeichen von a verschiedene Randwerte wählt. Auch in der Numerik hat die Strömungsrichtung Einfluss auf den Algorithmus. So wählen wir bei $a > 0$ (Strömung von links nach rechts) Rückwärtsdifferenzen und bei $a < 0$ Vorwärtsdifferenzen für die Ortsableitung.

Wählt man für $\bar{\Omega}$ ein reguläres Gitter bestehend aus Gitterpunkten $(x_j, t^n) = (j \cdot \Delta_x, n \cdot \Delta_t)$ für $j = 0, \dots, J$ und $n = 0, \dots, N$, so berechnet sich y_j^{n+1} - die Näherungslösung von $y(x_j, t^{n+1})$ - gemäß folgender Vorschrift:

$$y_j^{n+1} = \begin{cases} y_j^n - a_j^n \lambda (y_j^n - y_{j-1}^n) & \text{falls } a_j^n > 0 \\ y_j^n - a_j^n \lambda (y_{j+1}^n - y_j^n) & \text{falls } a_j^n < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

wobei $a_j^n := a(x_j, t^n)$ und $\lambda := \frac{\Delta_t}{\Delta_x}$.

4.2 Bemerkung Für den Fall $0 < a = \text{const}$ und $b = 0$ können wir mit Hilfe der *Courant-Friedrichs-Levi-Bedingung*

$$a\lambda \leq 1 \quad (\text{CFL-Bedingung}) \quad (4.6)$$

Stabilität und Konsistenzordnung 1 sicherstellen, falls die Anfangsbedingung y^a Lipschitz-stetig differenzierbar ist.

4.1.2. Numerische Behandlung der Gleichungen

Das Gleichungssystem (3.21) besteht nur noch aus einer gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Zeit für v , zwei partiellen Differentialgleichung der Form (4.3) für ρ und z , sowie aus einer algebraischen Gleichung für die Temperatur T .

$$\begin{aligned}\rho_t + \frac{v+Q}{A}\rho_x &= -\frac{q}{A}\rho \\ z_t + \frac{v+Q}{A}z_x &= -R_0zK^\chi(T) \\ v_t &= \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{A}\rho dx} \left[\frac{p^l - p_0}{\varepsilon} - \int_0^1 \left(\int_0^x b\rho_t + cz_t + dT_t dy \right) \frac{\rho}{A} dx - \int_0^1 \frac{q(v+Q)\rho}{A^2} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 F_{\text{Kat}} \frac{\chi^{(1)}(v+Q)\rho}{A} dx - \int_0^1 F_0 \frac{w}{A^3} \rho \frac{(v+Q)^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{A_x}{A^3} \rho (v+Q)^2 dx \right] \\ T &= \frac{p_0}{\rho}\end{aligned}$$

Die soeben eingeführten Verfahren genügen, um dieses Modell numerisch zu simulieren. Die Berechnung einer neuen Zeitebene $n+1$ des obigen System mit Hilfe der genannten Verfahren, erfolgt mit Hilfe des folgenden Algorithmus:

1. Berechne ...

- ρ_j^{n+1} und z_j^{n+1} aus den ersten beiden Gleichungen mit Hilfe des Upwind-Verfahrens
- T_j^{n+1} mit Hilfe des Idealen Gasgesetzes.
- q_j^{n+1} sowie Q_j^{n+1} durch numerische Integration (Trapezregel).

für alle $j = 1, \dots, J$.

2. Berechne v^{n+1} aus der dritten Gleichung mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens.

Diese Reihenfolge ist notwendig, da in der Berechnung von v Ableitungen nach der Zeit von ρ, z und T auftauchen, welche wir durch *Vorwärts-Differenzen* approximieren. Dafür brauchen wir die numerischen Lösungen dieser Zustandsgrößen von dem neuen Zeitschritt.

Als Diskretisierung der Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned}
 \rho_j^{n+1} &= \rho_j^n - \Delta_t \frac{v^n + Q_j^n}{A} \frac{\rho_j^n - \rho_{j-1}^n}{\Delta_x} - \Delta_t \frac{q_j^n}{A} \rho_j^n \\
 z_j^{n+1} &= z_j^n - \Delta_t \frac{v^n + Q_j^n}{A} \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{\Delta_x} - \Delta_t R_0 z_j^n K^\chi(T_j^n) \\
 v^{n+1} &= v^n + \Delta_t \left\{ \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{A} \rho_j^n dx} \left[\int_0^1 \frac{A_x}{A^3} \rho (v^n + Q_j^n)^2 dx - \int_0^1 \frac{q_j^n (v^n + Q_j^n) \rho}{A^2} dx \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_0^1 \left(\int_0^x b_j^n \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta_t} + c_j^n \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta_t} + d_j^n \frac{T_{n+1j} - T_j^n}{\Delta_t} dy \right) \frac{\rho_j^n}{A} dx \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_0^1 F_{\text{Kat}} \frac{\chi^{(1)}(v^n + Q_j^n) \rho_j^n}{A} dx - \int_0^1 F_0 \frac{w}{A^3} \rho \frac{(v^n + Q_j^n)^2}{2} dx + \frac{p^l - p_0}{\varepsilon} \right] \right\} \\
 T_j^{n+1} &= \frac{p_0}{\rho_j^{n+1}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die bekannten abhängigen Variablen wie die Rand- und Anfangsbedingungen sowie die Funktionen zur Beschreibung der geometrischen Strukturen des Auspuffrohres, diskretisieren wir, indem wir sie auf den Gitterpunkten x_j beziehungsweise t^n auswerten. Somit haben wir ein explizites vollständiges Verfahren zur numerischen Simulation unseres Modells (3.21).

4.2. Simulationsreihen

Die in den folgenden Abschnitten dargestellten Simulationsreihen wurden alle mit dem Programm `auspuff.m` erstellt. Durchgeführt wurden die Simulationen auf dem Rechner im Diplomandenzimmer (Pentium 4 2.4Ghz, 512 MB RAM) mit dem Programm MATLAB (Version: 7.10.0.499 (R2010a)). Die Rechenzeit betrug durchschnittlich 30 Minuten für eine Simulationsdauer von 1 Sekunde.

Bei allen Simulationen wurden die selben geometrischen Daten des Auspuffs (vgl. Tabelle 3.1) verwendet. Eine äquidistante Unterteilung des Ortes bietet sich auf Grund der speziellen geometrischen Struktur nicht an. Da die Änderung der Radiusfunktion an den Übergängen der Länge 0.03 m sehr groß ist, muss man an diesen Stellen besonders fein rechnen. Auch in den Katalysatoren, in denen die starke Reibung mit dem Keramikblock sowie die Verbrennung der Restmenge Kraftstoff stattfinden, ist eine erhöhte Feinheit empfehlenswert. Da diese Feinheiten in den restlichen Teilen des Rohres mit jeweils stückweise konstanten Radius nicht notwendig sind, wählt man hier eine größere Schrittweite um die Rechenzeit einer Simulation möglichst gering zu halten. Wir wählen also als Schrittweiten für unsere Simulationsreihen jeweils

$$\Delta_x^{\text{Übergang}} = 5 \cdot 10^{-4} \quad \Delta_x^{\text{Katalysator}} = 10^{-3} \quad \Delta_x^{\text{sonst}} = 10^{-2}$$

Auf diese Art erhalten wir 267 Stützstellen auf dem betrachteten Gebiet $[0, 1]$. Bei einer äquidistanten Unterteilung, wobei wir von der geringsten Schrittweite $\Delta_x^{\text{Übergang}}$ ausgehen müssten, läge die Zahl der Stützstellen bei 2000.

Mit der CFL-Bedingung erhalten wir die äquidistante Schrittweite für die Zeit.

$$\Delta_t = \frac{1}{u_{max}} \min\{\Delta_x^{\text{Übergang}}, \Delta_x^{\text{Katalysator}}, \Delta_x^{\text{sonst}}\} = 10^{-4}$$

Da wir maximal von Geschwindigkeiten von 200 ms^{-1} im unskalierten, beziehungsweise $u_{max} = 5$ im skalierten Fall ausgehen, errechnet sich eine Zeitschrittweite von $\Delta_t = 10^{-4}$.

In den Simulationsreihen werden lediglich die Modellparameter variiert. Sowohl Rand- als auch Anfangsbedingungen werden für alle Simulationsreihen gleich gewählt, sofern nicht anderweitig darauf hingewiesen wird.

- Die unskalierten Anfangsbedingungen lauten für alle $\tilde{x} \in [0, L]$:

$$\tilde{\rho}^a = 1.2 \text{ kgm}^{-3} \quad \tilde{u}^a = 0 \text{ ms}^{-1} \quad \tilde{z}^a = 0 \quad (4.8)$$

- Die unskalierten Randbedingungen lauten für alle $\tilde{t} \in [0, \tilde{t}_{max}]$:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^l &= 0.4148 \text{ kgm}^{-3} & \tilde{p}^l &= 1.015 \cdot 10^5 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-2} \\ \tilde{z}^l &= 0.01 & \tilde{p}_0 &= 10^5 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Für die in den folgenden Abschnitten diskutierten numerischen Lösungen einzelner Simulationsreihen und insbesondere der numerischen Lösung der Geschwindigkeit u , führen wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die folgenden Bezeichnungen ein.

$$\begin{aligned} I_1(t) &:= \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{A} \rho dx} & I_2(t) &:= \int_0^1 \int_0^x (b\rho_t + cz_t + dT_t dy) \frac{\rho}{A} dx \\ I_3(t) &:= \int_0^1 \frac{q(v+Q)\rho}{A^2} dx & I_4(t) &:= \int_0^1 F_{\text{Kat}} \frac{\chi^{(1)}(v+Q)\rho}{A} dx \\ I_5(t) &:= \int_0^1 F_0 \frac{w}{A^3} \rho \frac{(v+Q)^2}{2} dx & I_6(t) &:= \int_0^1 \frac{A_x}{A^3} \rho (v+Q)^2 dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die soeben definierten Integrale sind jene, die zur Berechnung von v in der gewöhnlichen Differentialgleichung des Modells (3.21) auftauchen.

4.2.1. Simulationsreihe I: Nur mit Wandreibung

Wie wir bereits in Abschnitt 3.8 über stationäre Lösungen gesehen haben, ist die Existenz einer Wandreibung für die Existenz einer analytischen Lösung des stationären Problem notwendig. Nicht anders verhält es sich bei den numerischen Lösungen. Auch für die Existenz einer numerischen Lösung, die gegen einen stationären Zustand konvergiert, ist in der Diskretisierung (4.7) eine Wandreibung notwendig.

Für die erste Simulation wurden die folgenden Werte für die Modellparameter gewählt: Das bedeutet also, es gibt keine Katalysatorreibung ($C = 0$), keinen Wärmetausch mit der

Parameterbezeichnung	Wert
Katalysatorreibung C	0
Wärmedurchgangskoeffizient h	0
Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0	0
Aktivierungsenergie E^+	600
Wärmefreisetzungsrate q_0	0

Tabelle 4.1.: Parameterwerte der Simulationsreihe I

Rohrwand ($h = 0$) und keine exotherme Reaktion der Restmenge Kraftstoff im Katalysator ($K_0 = 0$). Die Wahl der Parameterwerte für E^+ und q_0 ist irrelevant, da keine Reaktion durch $K_0 = 0$ stattfinden kann.

An den Abbildungen 4.1 und 4.2 kann man gut erkennen, dass die Zustandsgrößen Kraftstoffanteil und Dichte (und somit auch die Temperatur) durch das Rohr transportiert werden. Abhängig von der vorherrschenden Geschwindigkeit geschieht das in einigen Abschnitten schneller oder langsamer. Am Konturbild der Geschwindigkeit (vgl. Abbildung 4.2) spiegelt sich die Geometrie des Auspuffrohres wieder. So sieht man, dass die Geschwindigkeit in den Rohrstücken mit höherem Durchmesser geringer ist als die in den restlichen Rohrstücken.

Auffällig ist auch das schnelle Anwachsen der Geschwindigkeit auf eine Höhe von etwa 50ms^{-1} in den dünnen Rohrstücken, bedingt durch die Druckdifferenz am Rohrein- und -ausgang. Dieser Zustand hält über eine längere Zeit an, bis ein zweiter erneuter Anstieg auf etwa 110ms^{-1} in den dünnen Rohrstücken stattfindet. Grund für diesen konstanten Zwischenzustand ist der Hauptdämpfer. Dieses sehr breite und lange Teilstück ist bis zum zweiten Anstieg von u noch mit der vergleichsweise schweren Luft gefüllt. Erst nachdem diese den Hauptdämpfer verlassen hat, kommt es zu dem zweiten Anstieg der Geschwindigkeit.

Dieses Verhalten lässt sich auch in den Gleichungen wiederfinden. Für festes t ist die numerische Lösung von $\rho(x, t)$, sofern sie noch nicht konstant ist, monoton steigend. Dies führt zu einem zunächst negativen Wert für das Integral $I_6(t)$. Die Erklärung dafür ist die Folgende: Da wir weder die Wärmeabgabe durch die Wand noch eine Verbrennung von Kraftstoff betrachten, verschwindet q und somit auch Q für alle x und t . Die Abbildung $x \mapsto A_x(x)/A(x)^3$ verschwindet nur an den Übergängen nicht und liefert für die Ein- und Ausgänge zu den Katalysatoren und Dämpfern jeweils, bis auf Vorzeichen, exakt gleiche Beiträge. Somit wäre das Integral über das Intervall $[0, 1]$ dieser Funktion Null. Solange die Funktion aber mit

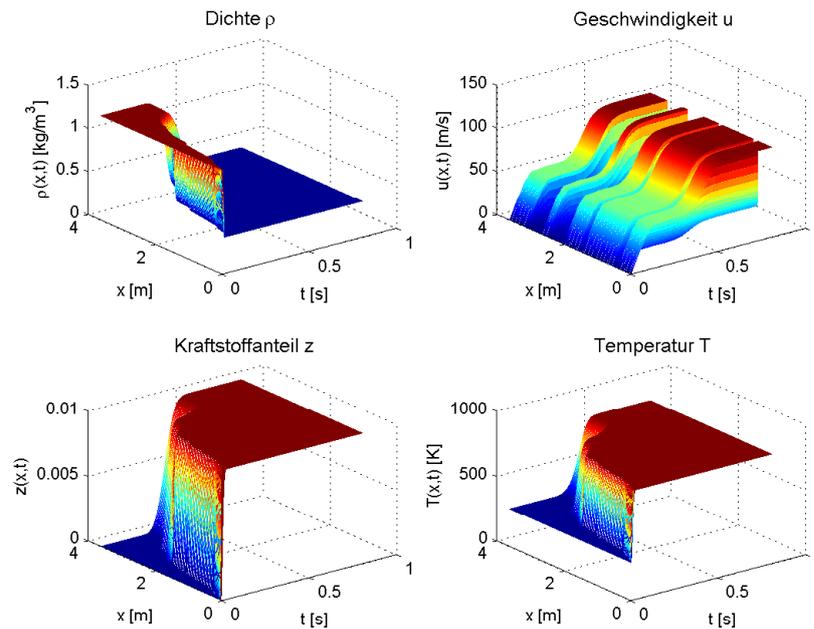


Abbildung 4.1.: Simulationsreihe I: Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösungen von ρ , u , z und T

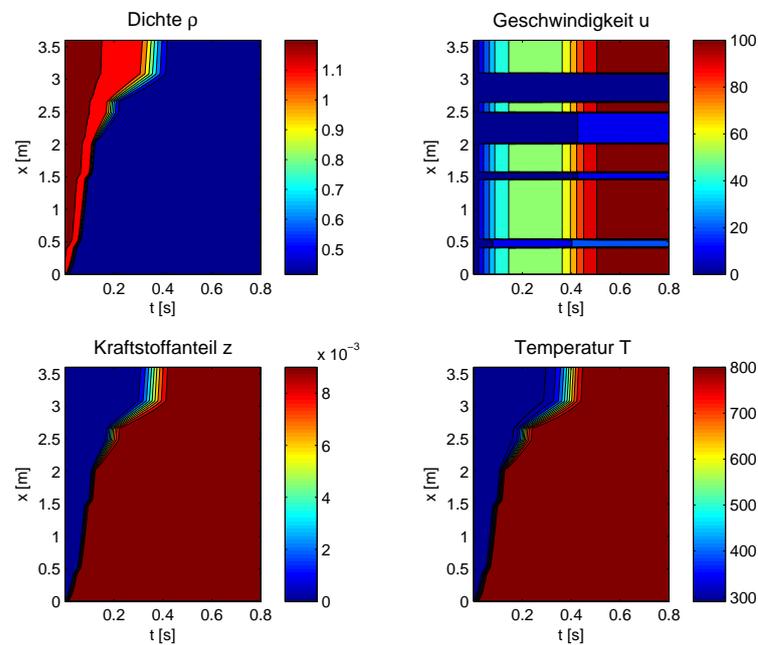


Abbildung 4.2.: Simulationsreihe I: Kontur-Darstellung der numerischen Lösungen von ρ , u , z und T

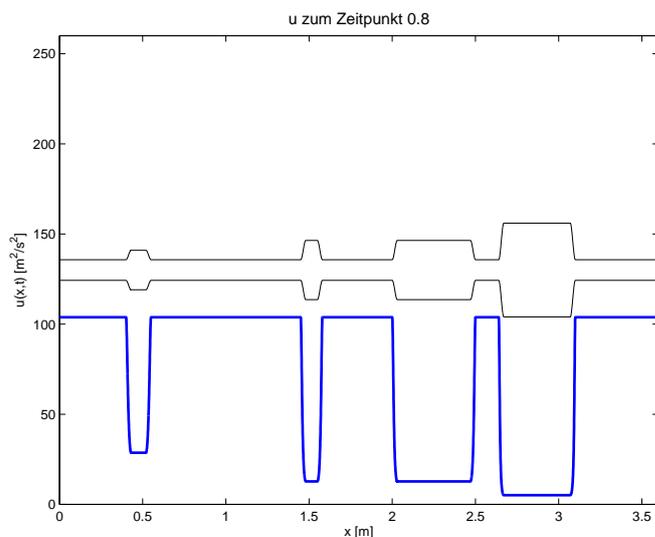
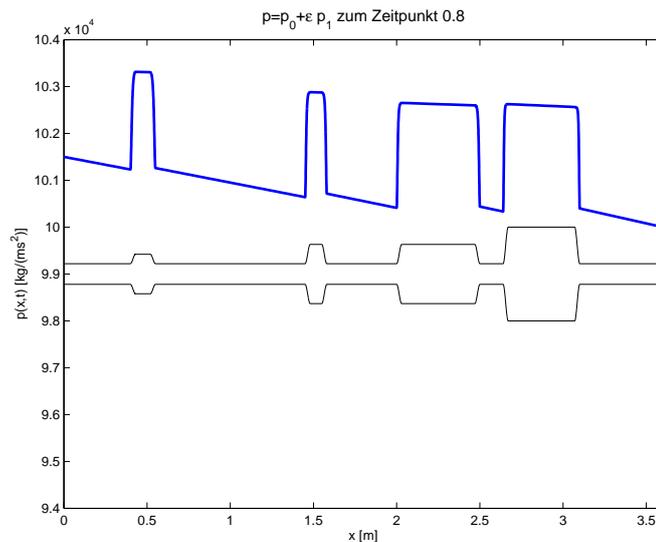


Abbildung 4.3.: Simulationsreihe I: Numerische Lösung für u nach $t = 0.8$ Sekunden

der nicht konstanten, sondern monoton steigenden Funktion ρ multipliziert wird, erfahren die Beiträge von A_x/A^3 an den jeweiligen Ausgängen von Katalysatoren und Dämpfern ein höheres Gewicht. Da das Vorzeichen dort negativ ist, fällt auch der Wert des Integrals $I_6(t)$ negativ aus, solange die numerische Lösung von ρ in den entscheidenden Bereichen monoton steigend ist.

Ist die Dichte ρ schließlich konstant, verschwindet das Integral $I_6(t)$ ab diesem Zeitpunkt. Auf der rechten Seite der Differentialgleichung für $v = Au$ verschwindet also ein negativer Term. Dies führt dann zu einer Zunahme der Geschwindigkeit bis diese, durch die Reibung an der Rohrwand gebremst, sich auf einen stationären Zustand einpendelt. Verstärkt wird der soeben beschriebene zweite Anstieg der Geschwindigkeit durch die Zunahme von I_1 , welches ebenfalls der zeitlichen Abnahme der Dichte ρ geschuldet ist.

4.3 Bemerkung Da wir weder Aussagen über die Existenz noch über die Eindeutigkeit von möglichen Lösungen des Modells (3.21) haben, fällt es schwer etwas über die Güte der numerischen Lösungen zu sagen. Physikalisch scheinen sie sinnvoll zu sein. Was wir jedoch wissen, ist wie die Profile der eindeutigen Lösungen des stationären Problems (3.24) aussehen. Diese werden sowohl qualitativ als auch quantitativ durch unsere numerischen Lösungen sehr gut wiedergegeben. Das Druck- und das Geschwindigkeitsprofil sind in den Abbildungen 4.3 beziehungsweise 4.4 dargestellt. (vgl. stationäre Lösungen in Abbildungen 3.6 und 3.7).

Abbildung 4.4.: Simulationsreihe I: Numerische Lösung für p nach $t = 0.8$ Sekunden

4.2.2. Simulationsreihe II: Randdruck p^l

Bezeichnung	Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Beispiel 4
linker Druckrandwert p^l	1.005	1.01	1.015	1.02

Tabelle 4.2.: Werte der Simulationsreihe II: Variation im Randdruck p^l

Da mit den Daten der Simulationsreihe I deutlich höhere Geschwindigkeiten erzielt wurden, als man eigentlich anhand der Ergebnisse in [LN04] hätte erwarten können, untersuchen wir in diesem Abschnitt genauer den Zusammenhang zwischen der Differenz der Druckrandwerte und der Geschwindigkeit. Wir simulieren zunächst für vier verschiedene Druckrandwerte am Auspuffrohreingang p^l . Für die restlichen Modellparameter wählen wir die selben Werte wie bei der Simulationsreihe I (vgl. Tabelle 4.1). Wir verzichten aufgrund der konstanten Verläufe von Dichte, Temperatur und Restmenge Kraftstoff auf graphische Darstellung dieser und betrachten nur die Geschwindigkeitsprofile für die verschiedene Randdrücke. In der Abbildung 4.5 sehen wir, dass mit zunehmender Differenz zwischen dem Randdruck am Auspuffeingang und dem konstanten Außendruck am Auspuffausgang, die maximale Geschwindigkeit zunimmt. Bereits an der eindeutigen Lösung für u des stationären Problems (3.24), konnte man ablesen, dass es eine positive Abhängigkeit zwischen Druckdifferenz $p^l - p_0$ und der Geschwindigkeit gab:

$$u(x) = c \sqrt{p^l - p_0} \cdot \frac{1}{r(x)^2}$$

wobei $c = c(I_F^r, \varepsilon, \rho^l)$ (vgl. (3.28)). Eine "wurzel"-ähnliche Abhängigkeit lässt auch die Abbildung 4.6 vermuten, die mit dem Programm `plinks_umax_abhaengigkeit.m` erstellt wurde.

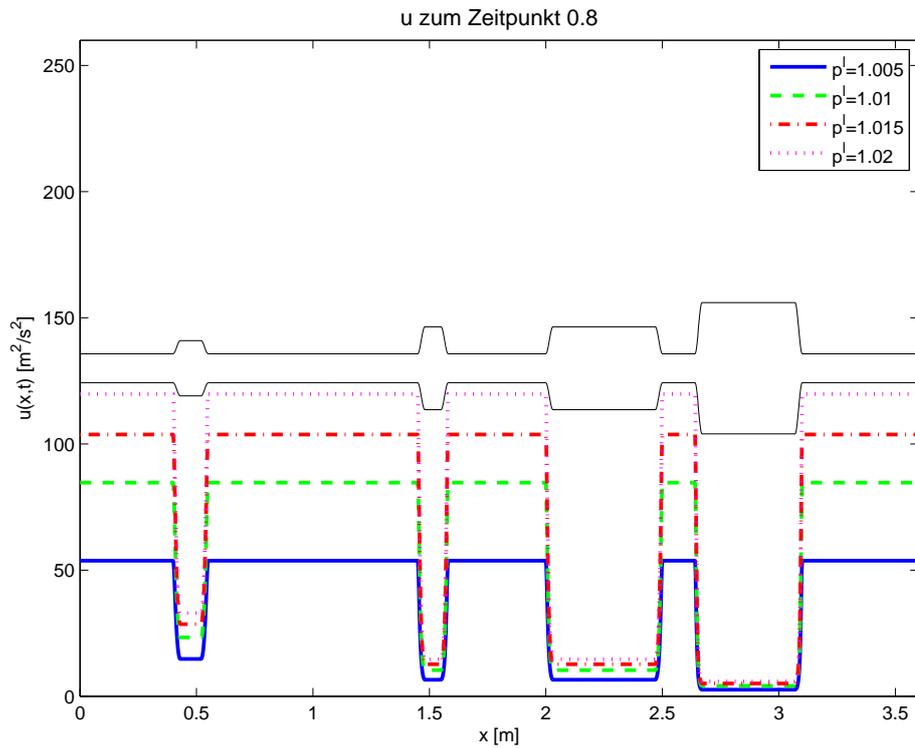


Abbildung 4.5.: Simulationsreihe II: Numerische Lösungen für u nach $t = 0.8$ Sekunden

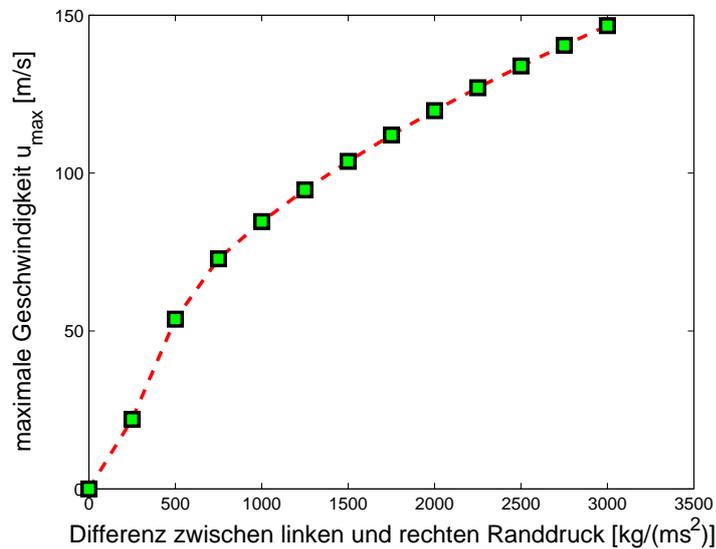


Abbildung 4.6.: Simulationsreihe II: Zusammenhang zwischen Differenz der Druckranddaten $p^l - p_0$ und der maximalen Geschwindigkeit u_{max}

4.2.3. Simulationsreihe III: Katalysator-Reibungskoeffizient C

Wir führen nun die Reibung im Katalysator C ein, die aufgrund der Wabenstruktur des Keramikblocks lokal im Auspuffrohr wirkt. Wir untersuchen die Auswirkung des Modellparameters C anhand von drei Beispielen.

Parameterbezeichnung	Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3
Katalysatorreibung C	0	400	800
Wärmedurchgangskoeffizient h	0	0	0
Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0	0	0	0
Aktivierungsenergie E^+	600	600	600
Wärmefreisetzungsrate q_0	0	0	0

Tabelle 4.3.: Parameterwerte der Simulationsreihe III: Variation in C

Die stationären Zustände aller Größen, die nach etwa 0.6 Sekunden erreicht werden, stimmen bis auf die Höhe der Geschwindigkeit mit den Ergebnissen der Simulationsreihe I überein. Die Reibung hat lediglich einen Einfluss auf die Geschwindigkeit. So resultiert aus einer höheren Katalysatorreibung eine niedrigere Geschwindigkeit. Dies wird in der Differentialgleichung für v durch das Integral I_4 deutlich, welches durch ein $C > 0$ einen negativen Beitrag liefert und die Geschwindigkeit somit drosselt.

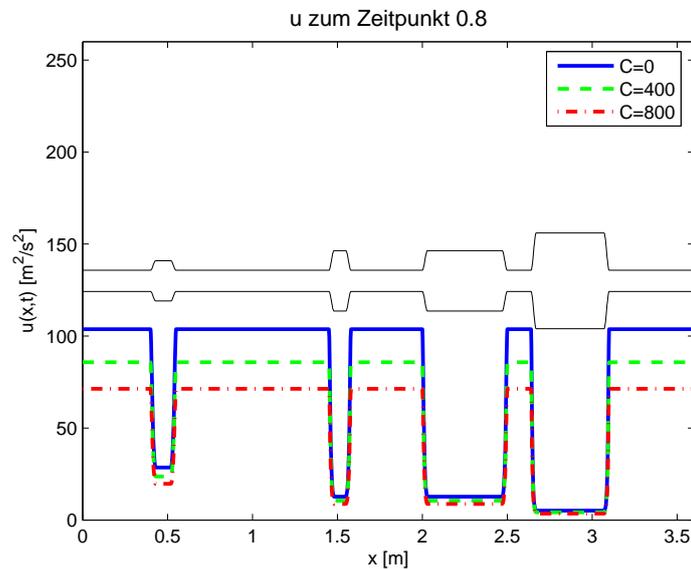


Abbildung 4.7.: Simulationsreihe III: Numerische Lösungen für u nach $t = 0.8$ Sekunden

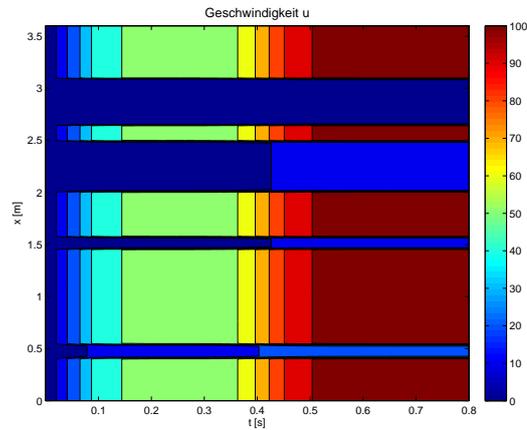


Abbildung 4.8.: Simulationsreihe III: Numerische Lösung für u mit $C = 0$

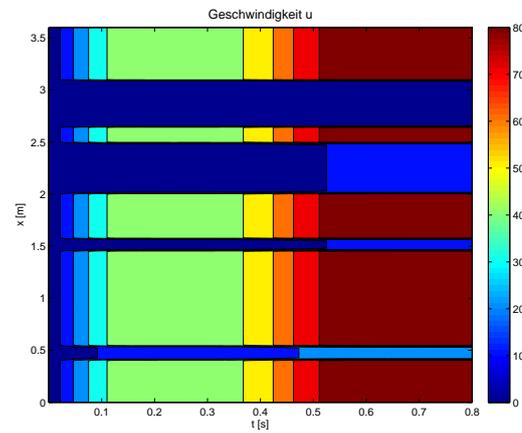


Abbildung 4.9.: Simulationsreihe III: Numerische Lösung für u mit $C = 400$

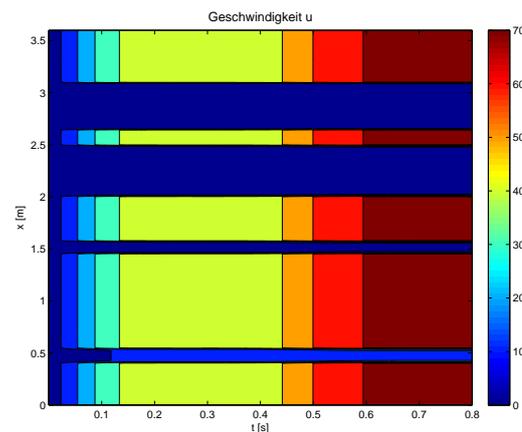


Abbildung 4.10.: Simulationsreihe III: Numerische Lösung für u mit $C = 800$

4.2.4. Simulationsreihe IV: Wärmedurchgangskoeffizient h

In diesem Abschnitt testen wir den Einfluss des Wärmedurchgangskoeffizienten h auf das Modell.

Parameterbezeichnung	Bsp. 1	Bsp. 2	Bsp. 3	Bsp. 4
Katalysatorreibung C	800	800	800	800
Wärmedurchgangskoeffizient h	0	50	100	150
Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0	0	0	0	0
Aktivierungsenergie E^+	600	600	600	600
Wärmefreisetzungsrate q_0	0	0	0	0

Tabelle 4.4.: Parameterwerte der Simulationsreihe IV: Variation in h

Da nach wie vor die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante bei Null liegt, gibt es als stationären Zustand für den Kraftstoffanteil z nur die konstante Lösung. Anders sieht es hier bei der Dichte ρ und der Temperatur T aus, die gemäß der Höhe des Wärmedurchgangskoeffizienten h unterschiedlich stark steigt beziehungsweise fällt (vgl. Abbildung 4.11).

Auf den ersten Blick überraschend scheint die Änderung der Geschwindigkeit u in Abhängigkeit des Wärmedurchgangskoeffizienten zu sein. Dabei ist der (bis auf die Übergänge) monoton fallende Verlauf von u , dem Term Q geschuldet, der für die akkumulierte Wärmeabgabe steht. Dessen Beitrag steigt betragsmäßig mit zunehmendem x und verursacht den tendenziell fallenden Verlauf der numerischen Lösung für die Geschwindigkeit. Eine weitere Begründung für dieses Verhalten liefert die Massenerhaltung. Da die Lösung für die Dichte ρ in x monoton zunimmt und das Produkt $A\rho u$ im stationären Zustand konstant sein soll, ist der tendenziell fallende Verlauf nachvollziehbar.

Auffällig ist aber vielmehr, dass die maximale Geschwindigkeit mit zunehmendem Wärmedurchgangskoeffizienten h steigt. Der Grund dafür lässt sich in der Differentialgleichung für v wiederfinden. Durch einen positiven Wärmedurchgangskoeffizienten ($h > 0$) und einer verschwindenden Reaktionsgeschwindigkeitskonstante ($K_0 = 0$) erhalten wir für q und Q stets einen negativen Wert. Somit hat das Integral I_3 ein negatives Vorzeichen, zumal $v + Q = Au$ stets nicht-negativ bleibt. Da das Integral I_3 ebenfalls mit negativen Vorzeichen in der Differentialgleichung für v auftaucht, führt dies zu einem höheren Wert für v , als im Fall $h = 0$, in dem das Integral I_3 verschwindet.

Die dreidimensionalen Darstellungen der numerischen Lösungen für Dichte, Geschwindigkeit, Kraftstoffanteil und Temperatur für die verschiedenen Werte des Wärmedurchgangskoeffizienten h werden in den Abbildungen 4.12 - 4.15 dargestellt.

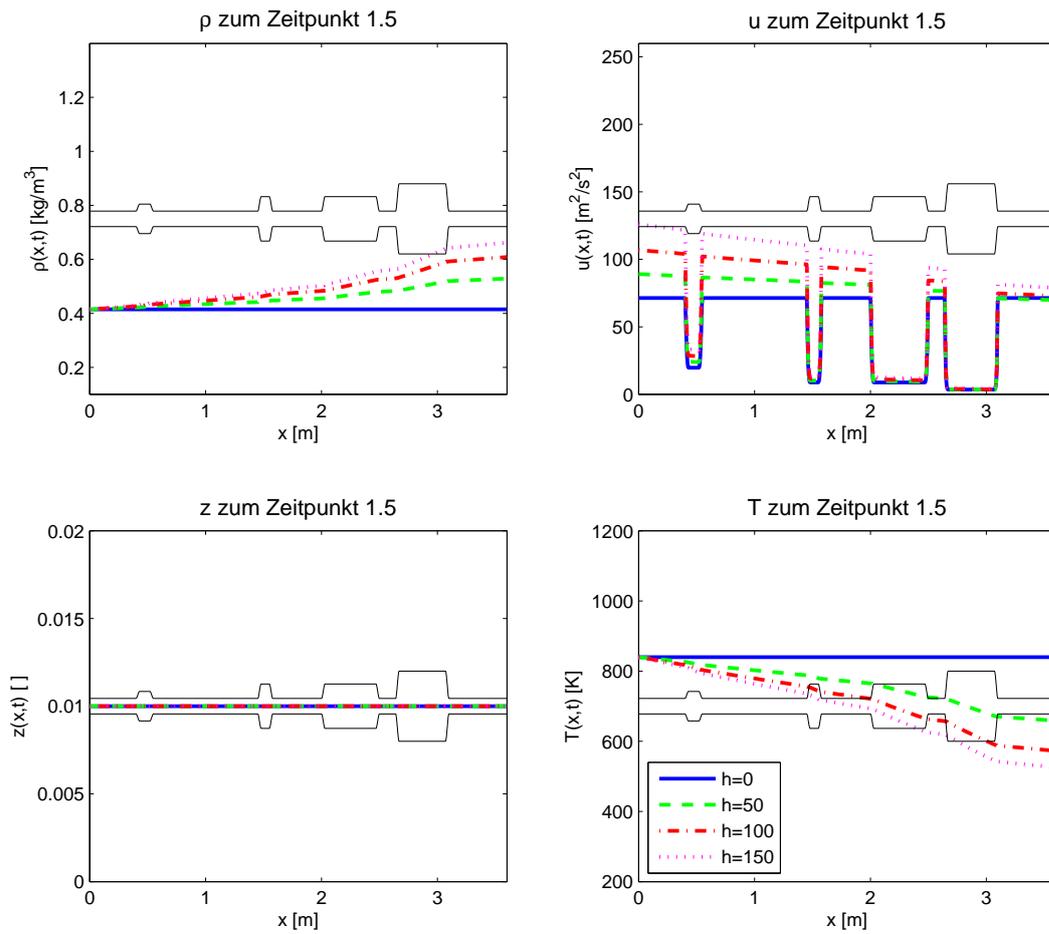


Abbildung 4.11.: Simulationsreihe IV: Numerische Lösungen für ρ , u , z und T nach $t = 1.5$ Sekunden

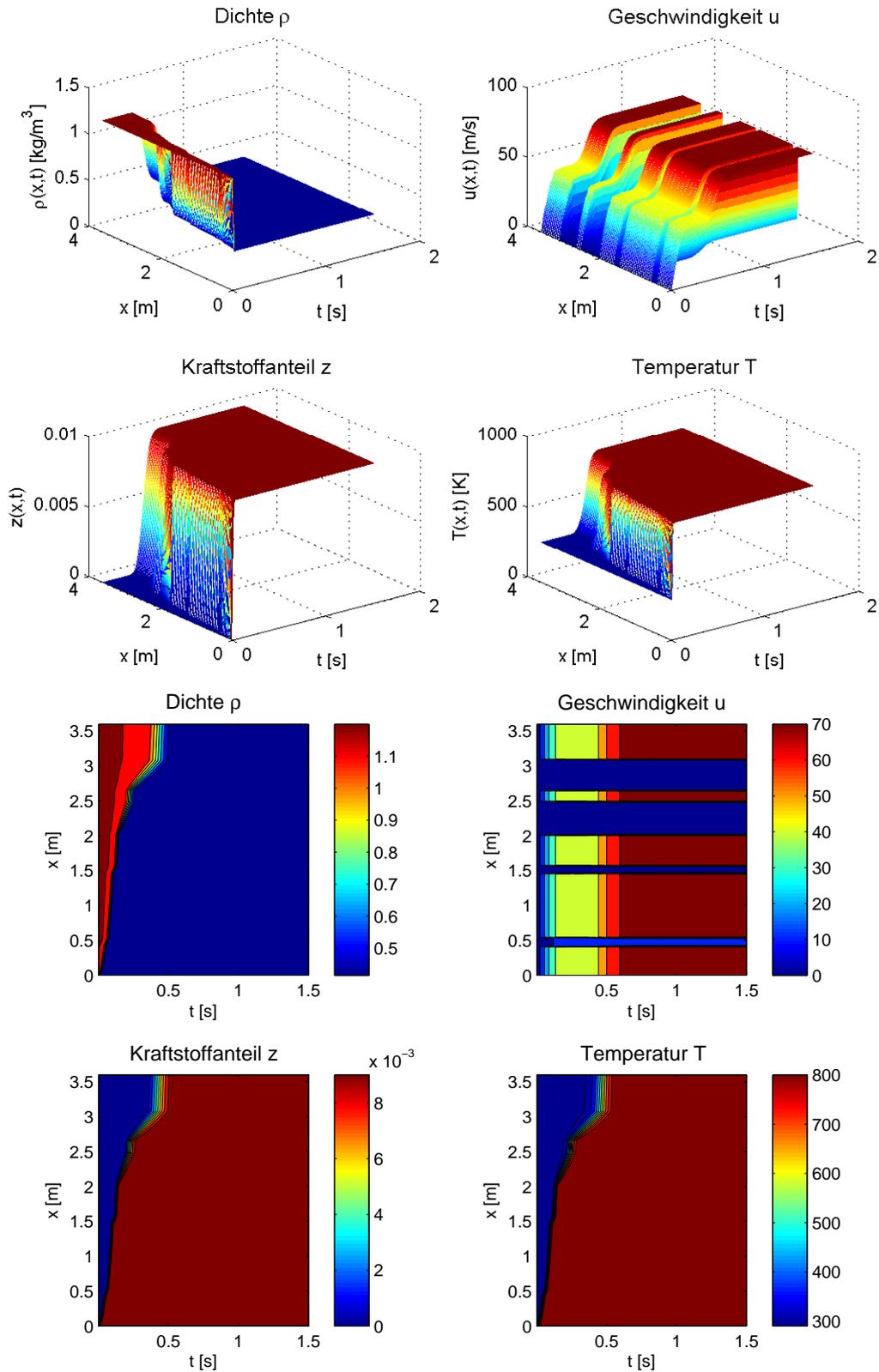


Abbildung 4.12.: Simulationsreihe IV: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $h = 0$

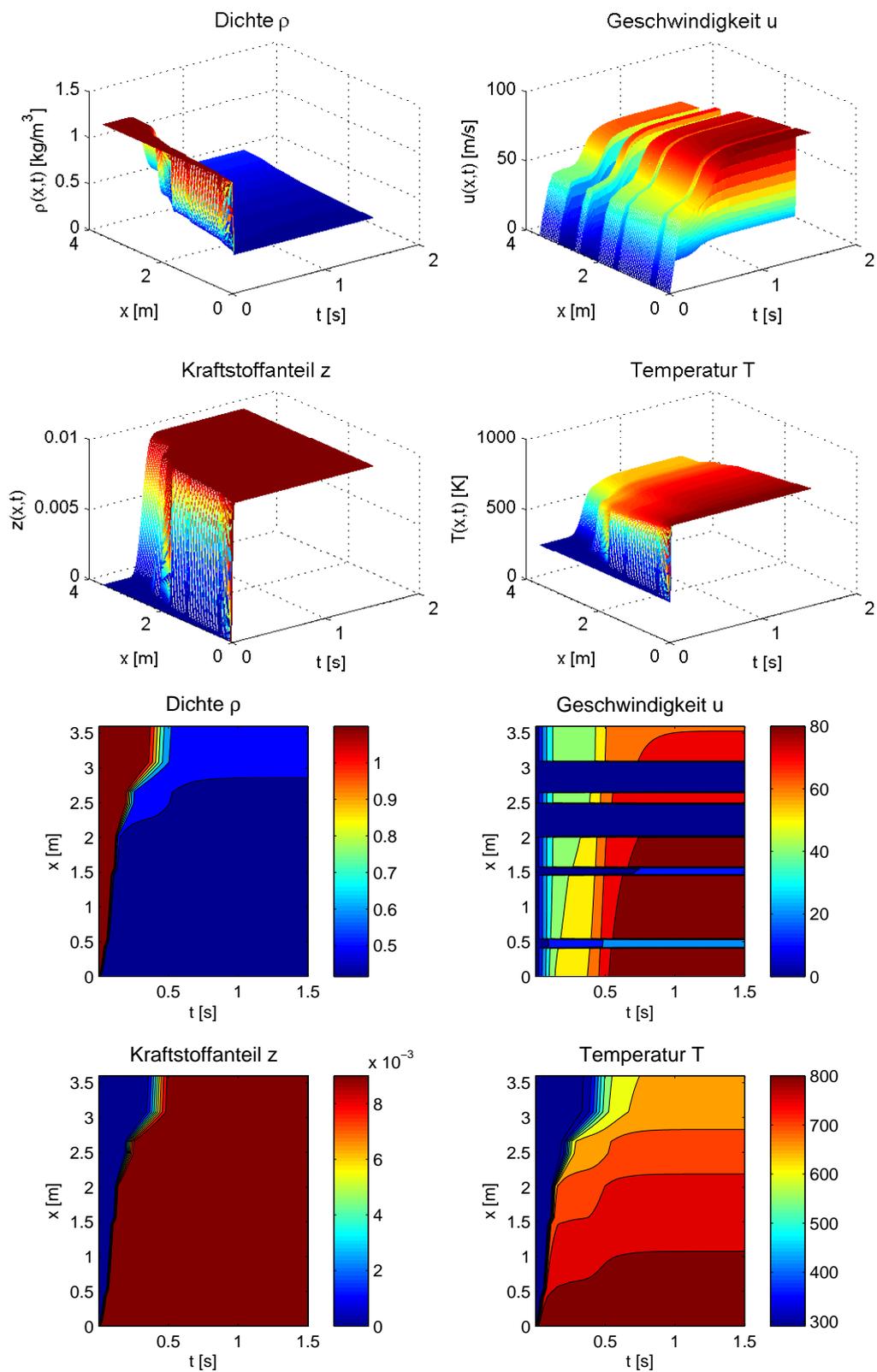


Abbildung 4.13.: Simulationsreihe IV: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $h = 50$

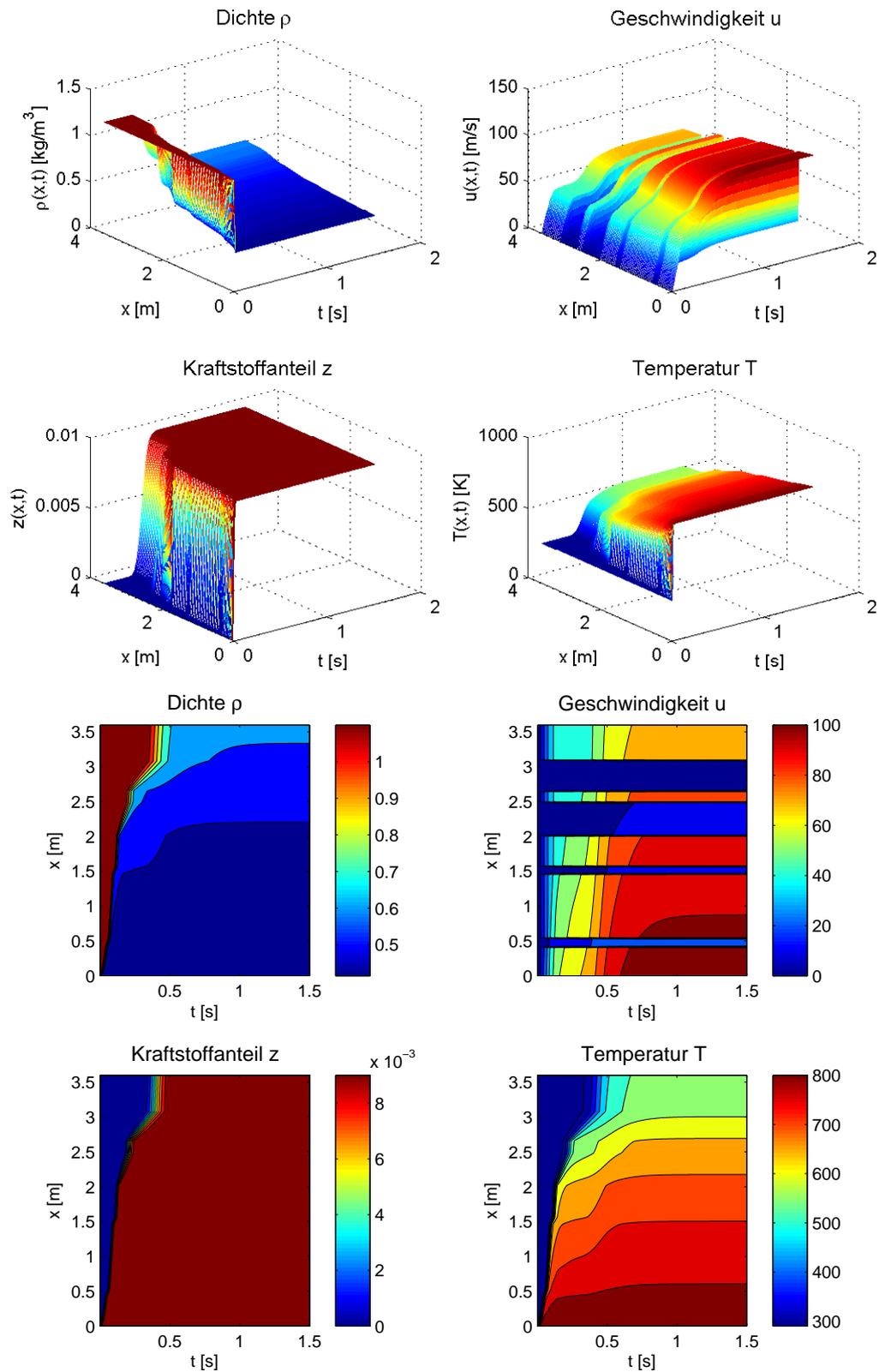


Abbildung 4.14.: Simulationsreihe IV: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $h = 100$

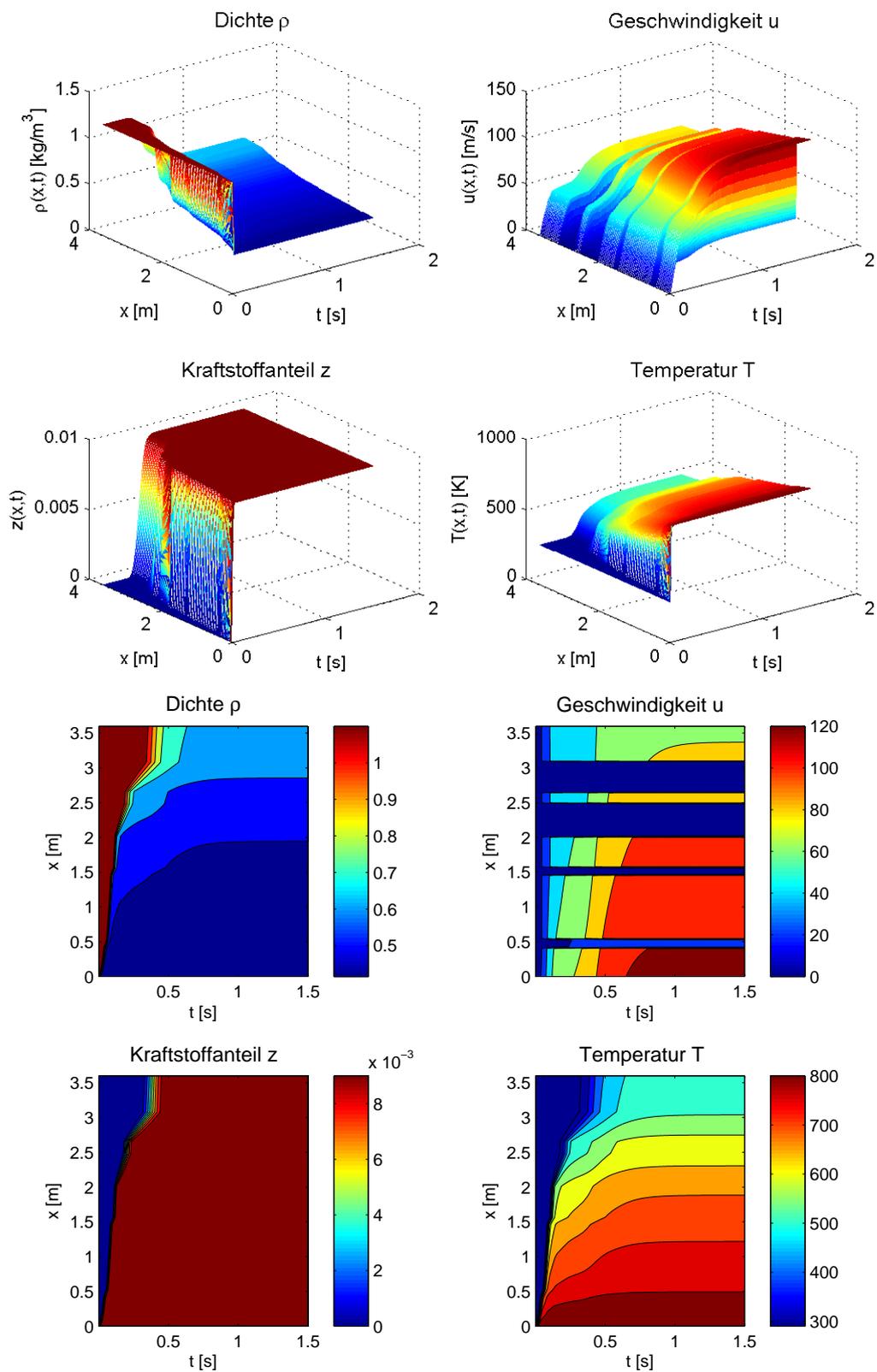


Abbildung 4.15.: Simulationsreihe IV: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $h = 150$

4.2.5. Simulationsreihe V: Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Einfluss der Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0 auf das Modell. Der Modellparameter K_0 beschreibt die Reaktionsgeschwindigkeit, die bei unendlich hoher Temperatur herrschen würde.

$$\lim_{\tilde{T} \rightarrow \infty} \tilde{K}(\tilde{T}) = \lim_{\tilde{T} \rightarrow \infty} K_0 \cdot \exp\left(-\frac{E^+}{\tilde{T}}\right) = K_0$$

Wir untersuchen nun das Verhalten der numerischen Lösung für vier verschiedene Werte von K_0 (vgl. Tabelle 4.5). Hier ist der Wert für den Modellparameter E^+ im *Arrheniusgesetz* entscheidend. Um den Einfluss der exothermen Reaktion auf den Dichte- und Temperaturverlauf besser beobachten zu können, wählen wir $h = 0$ (also ohne Wärmeabgabe an die Rohrwand). In der Abbildung 4.16 sehen wird, dass eine höhere Reaktionsgeschwindigkeits-

Parameterbezeichnung	Bsp. 1	Bsp. 2	Bsp. 3	Bsp. 4
Katalysatorreibung C	800	800	800	800
Wärmedurchgangskoeffizient h	0	0	0	0
Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0	0	100	200	400
Aktivierungsenergie E^+	600	600	600	600
Wärmefreisetzungsrate q_0	10^7	10^7	10^7	10^7

Tabelle 4.5.: Parameterwerte der Simulationsreihe V: Variation in K_0

konstante dazu führt, dass mehr Kraftstoff in den Katalysatoren verbrannt wird. Dies führt wiederum dazu, dass die Dichte lokal im Katalysator aufgrund der exothermen Reaktion sinkt. Analog steigt die Temperatur aus dem gleichen Grund.

Eine Bemerkung wert, ist das Verhalten der numerischen Lösungen für die Geschwindigkeit u (siehe Abbildung 4.17). Für steigende Werte K_0 ist die Geschwindigkeit zunächst niedriger und später höher, als die numerische Lösung ohne Verbrennung. Den Grund dafür erläutern wir im Folgenden.

Da der Wärmedurchgangskoeffizient h verschwindet, setzt sich q beziehungsweise Q nur aus der frei werdenden Verbrennungsenergie zusammen. Daher verschwindet Q bis zum Erreichen des ersten Katalysators. Ein zweiter Anstieg der Geschwindigkeit $u = (v + Q)/A$ folgt dann im Hauptkatalysator. Den Grund für das niedrigere Geschwindigkeitsniveau vor dem ersten Katalysator mit steigendem K_0 liefert die gewöhnliche Differentialgleichung für v . Da es keinen negativen Beitrag für q und Q durch die Wärmeabgabe durch die Wand gibt, steigt der Beitrag durch die Integrale I_2 bis I_5 , die mit negativen Vorzeichen in der Differentialgleichung für v auftauchen. Dieser negative Beitrag kann offenbar weder durch das sinkende ρ noch durch den größer werdenden Beitrag des Integral I_6 ausgeglichen werden kann.

Eine weitere Bemerkung sei dem Temperaturverlauf für den Fall $K_0 = 100$ gewidmet. Im Konturdiagramm (vgl. Abbildung 4.19) kann man erkennen, dass die Temperatur, bevor sie

den stationären Zustand erreicht, einen maximalen Beitrag liefert, der höher als jener im stationären Zustand ist. Der Grund dafür ist der, dass die Geschwindigkeit lange Zeit auf einem noch nicht stationären niedrigerem Niveau verweilt (vgl. Argumentation in Abschnitt 4.2.1). Durch den langsameren Transport des Kraftstoffes kann mehr Kraftstoff verbrannt werden, wodurch mehr Wärmeenergie frei wird. Erreicht die Geschwindigkeit schließlich ihr stationäres Niveau, reagiert eine geringere Kraftstoffmenge exotherm im Katalysator, wodurch die Temperatur wieder leicht abnimmt.

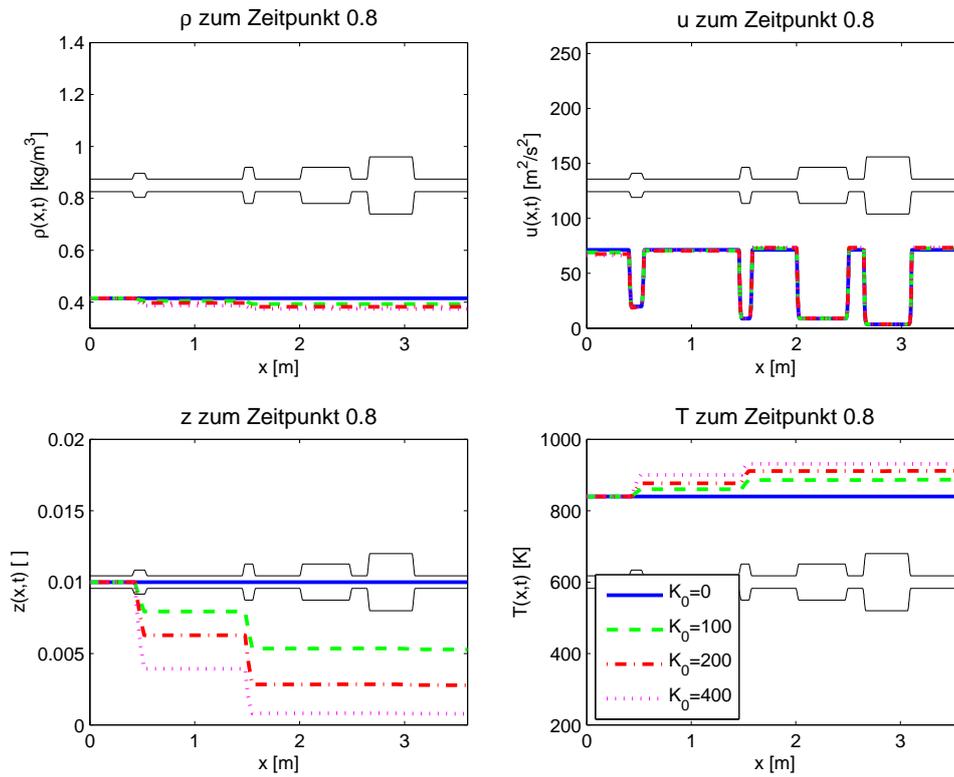


Abbildung 4.16.: Simulationsreihe V: Numerische Lösungen für ρ , u , z und T nach $t = 0.8$ Sekunden

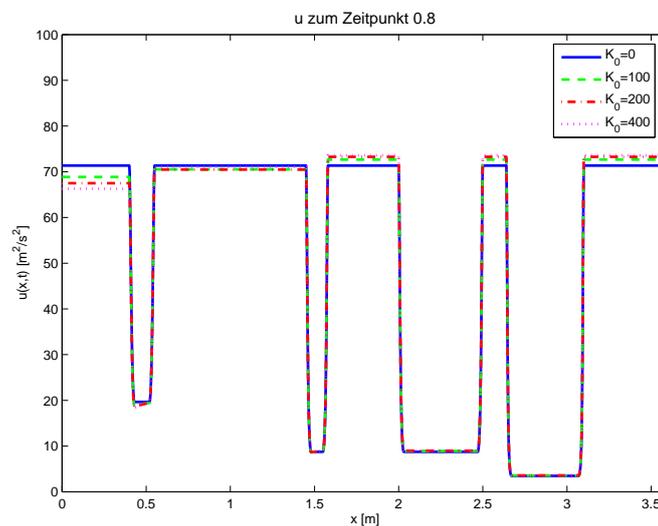


Abbildung 4.17.: Simulationsreihe V: Numerische Lösungen für u nach $t = 0.8$ Sekunden

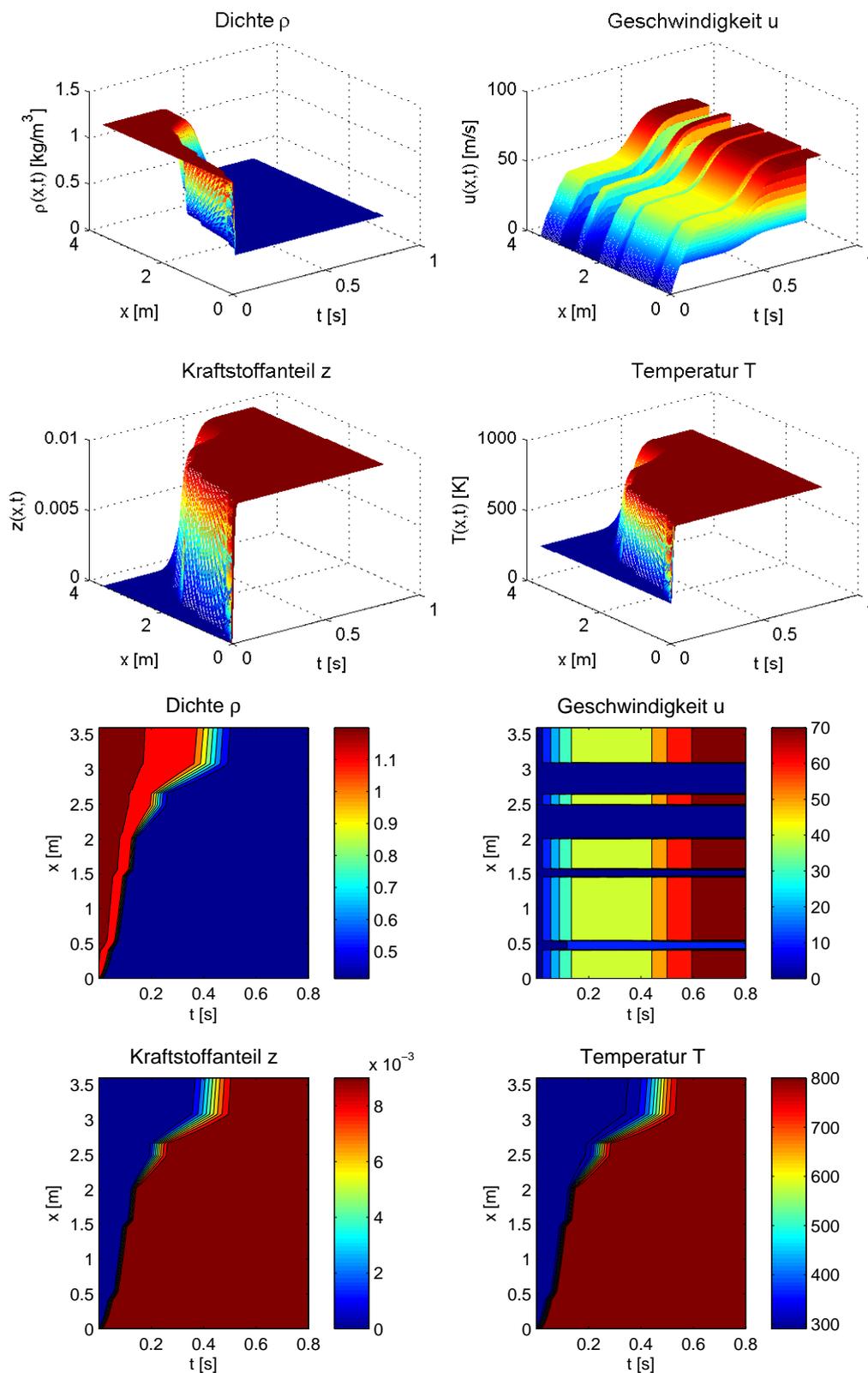


Abbildung 4.18.: Simulationsreihe V: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $K_0 = 0$

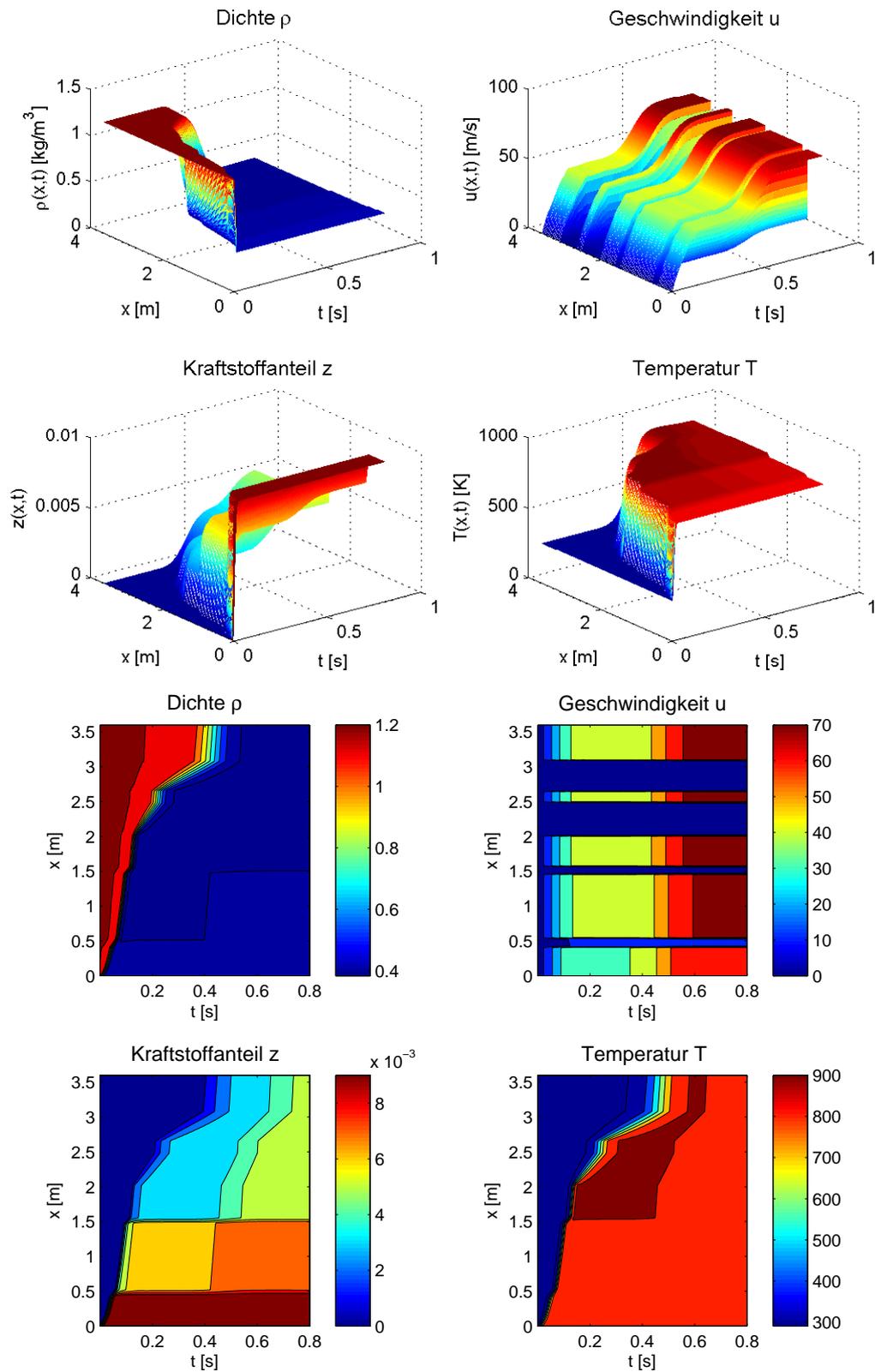


Abbildung 4.19.: Simulationsreihe V: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $K_0 = 100$

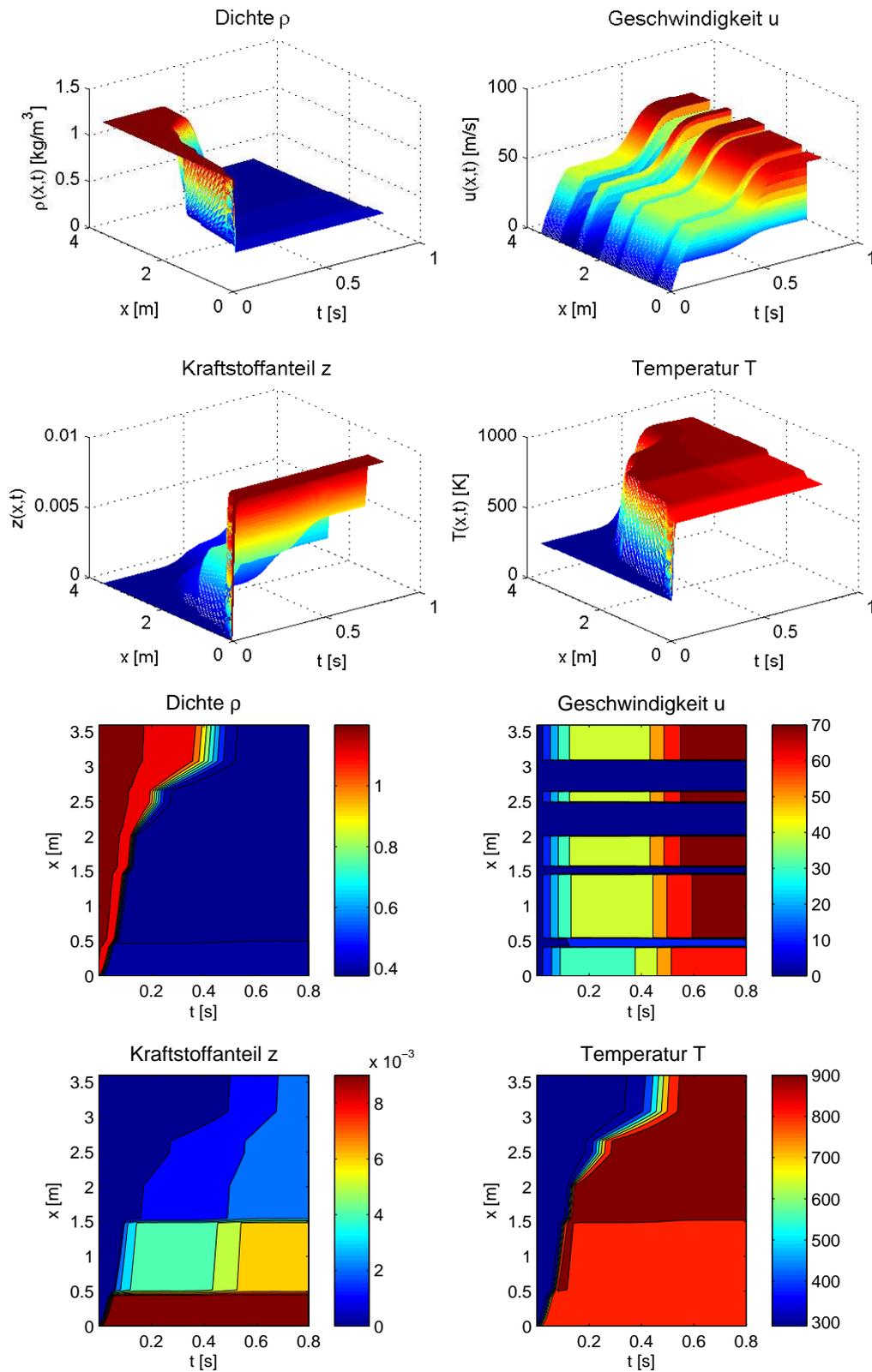


Abbildung 4.20.: Simulationsreihe V: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $K_0 = 200$

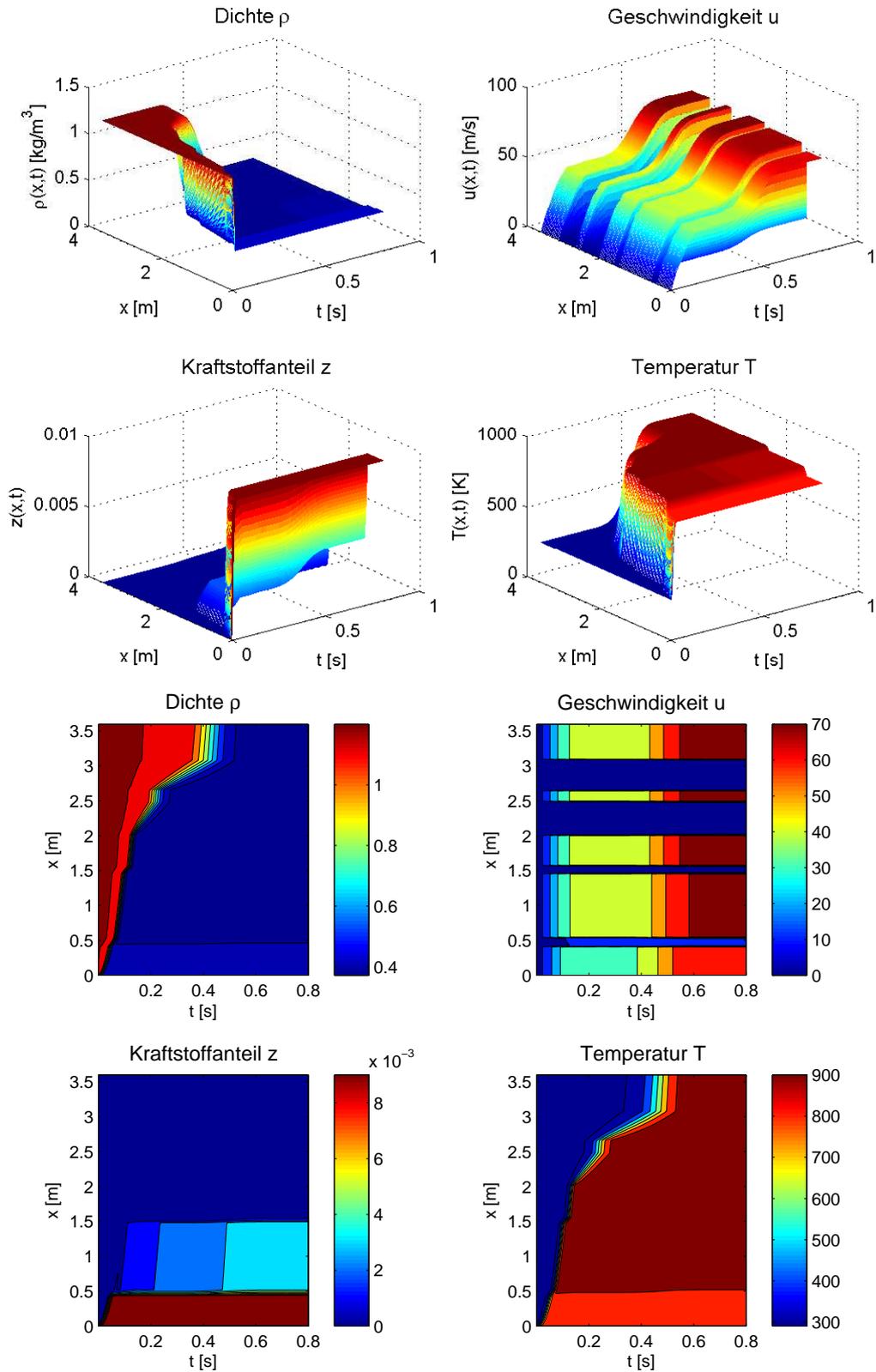


Abbildung 4.21.: Simulationsreihe V: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $K_0 = 400$

4.2.6. Simulationsreihe VI: Wärmefreisetzungsrate q_0

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Einfluss der Wärmefreisetzungsrate q_0 , die beschreibt wie viel Wärmeenergie durch die Verbrennung der restlichen Kraftstoffmenge in den Katalysatoren frei wird. Für diese Simulationsreihe haben wir einen Wärmetauschkoeffizienten von $h = 100$ gewählt, um die Auswirkung der exothermen Reaktion im Katalysator unter Berücksichtigung aller betrachteten Phänomene bewerten zu können. In der Abbildung 4.22 können wir erkennen, dass ein höherer Wert für q_0 , die erwarteten Folgen für die Dichte und die Temperatur nach sich zieht. Auch das Verhalten der Geschwindigkeit u ist mit dem Wissen aus dem Abschnitt zuvor nachvollziehbar.

Parameterbezeichnung	Bsp. 1	Bsp. 2	Bsp. 3	Bsp. 4
Katalysatorreibung C	800	800	800	800
Wärmedurchgangskoeffizient h	100	100	100	100
Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0	400	400	400	400
Aktivierungsenergie E^+	600	600	600	600
Wärmefreisetzungsrate q_0	0	10^6	10^7	10^8

Tabelle 4.6.: Parameterwerte der Simulationsreihe VI: Variation in q_0

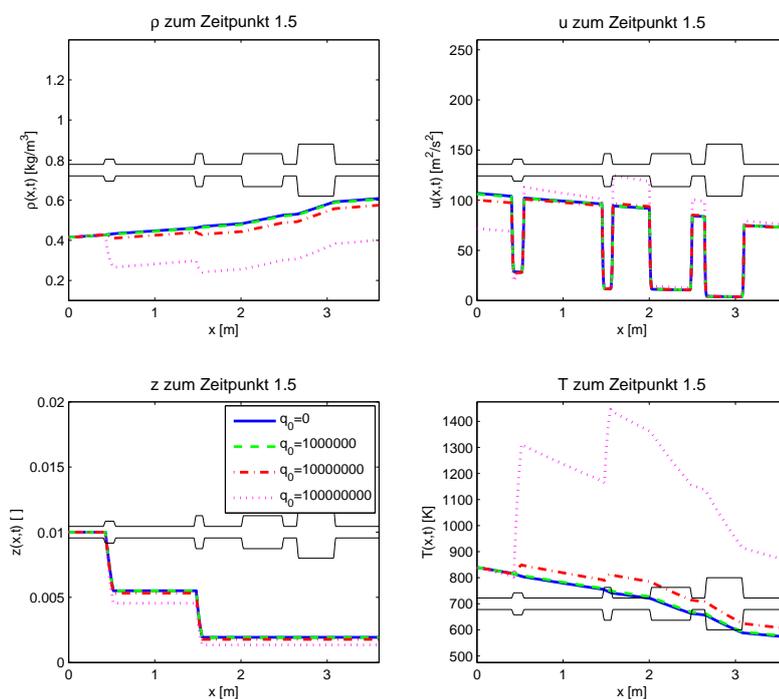


Abbildung 4.22.: Simulationsreihe VI: Numerische Lösungen für ρ , u , z und T nach $t = 1.5$ Sekunden

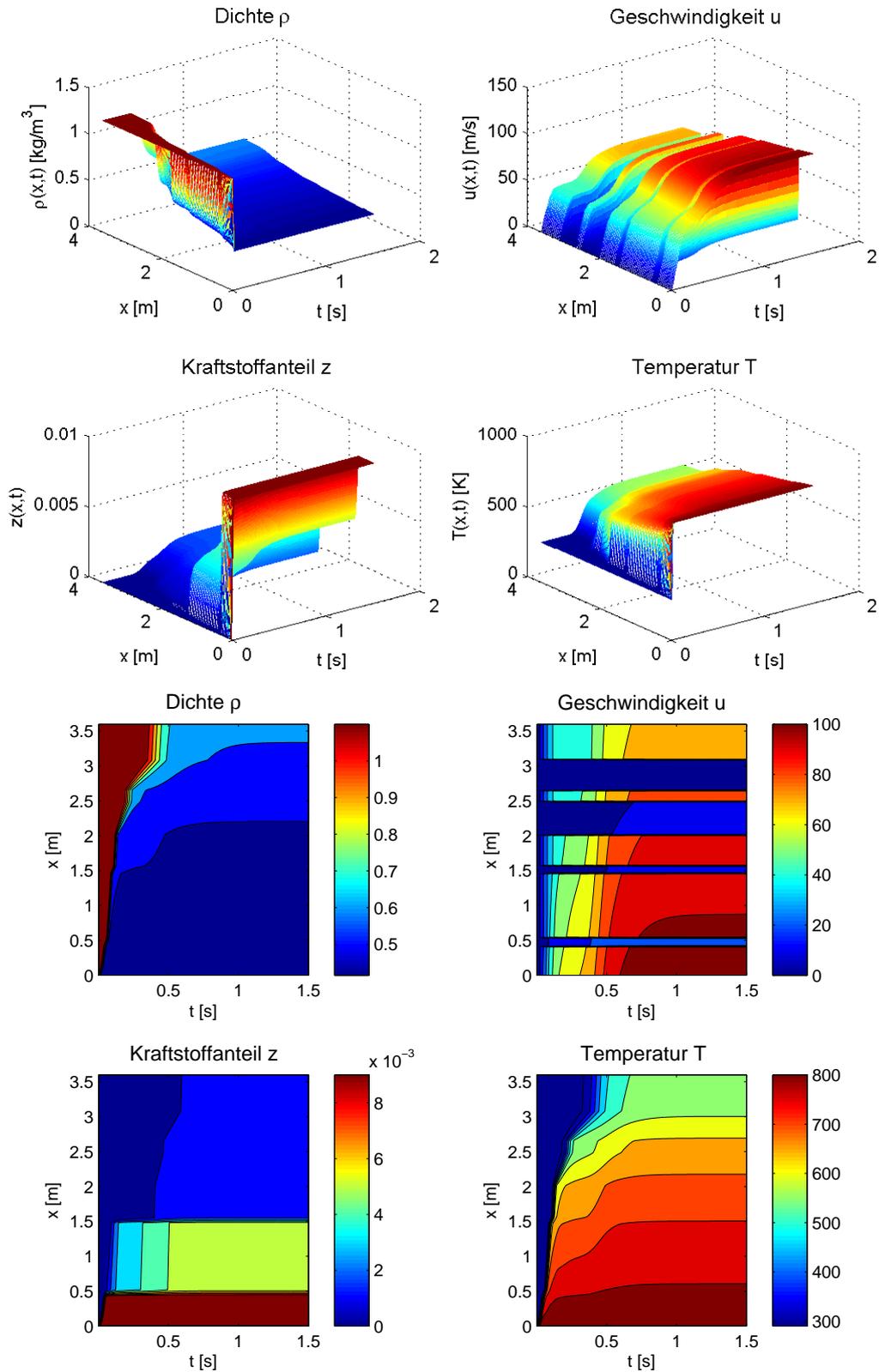


Abbildung 4.23.: Simulationsreihe VI: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $q_0 = 0$

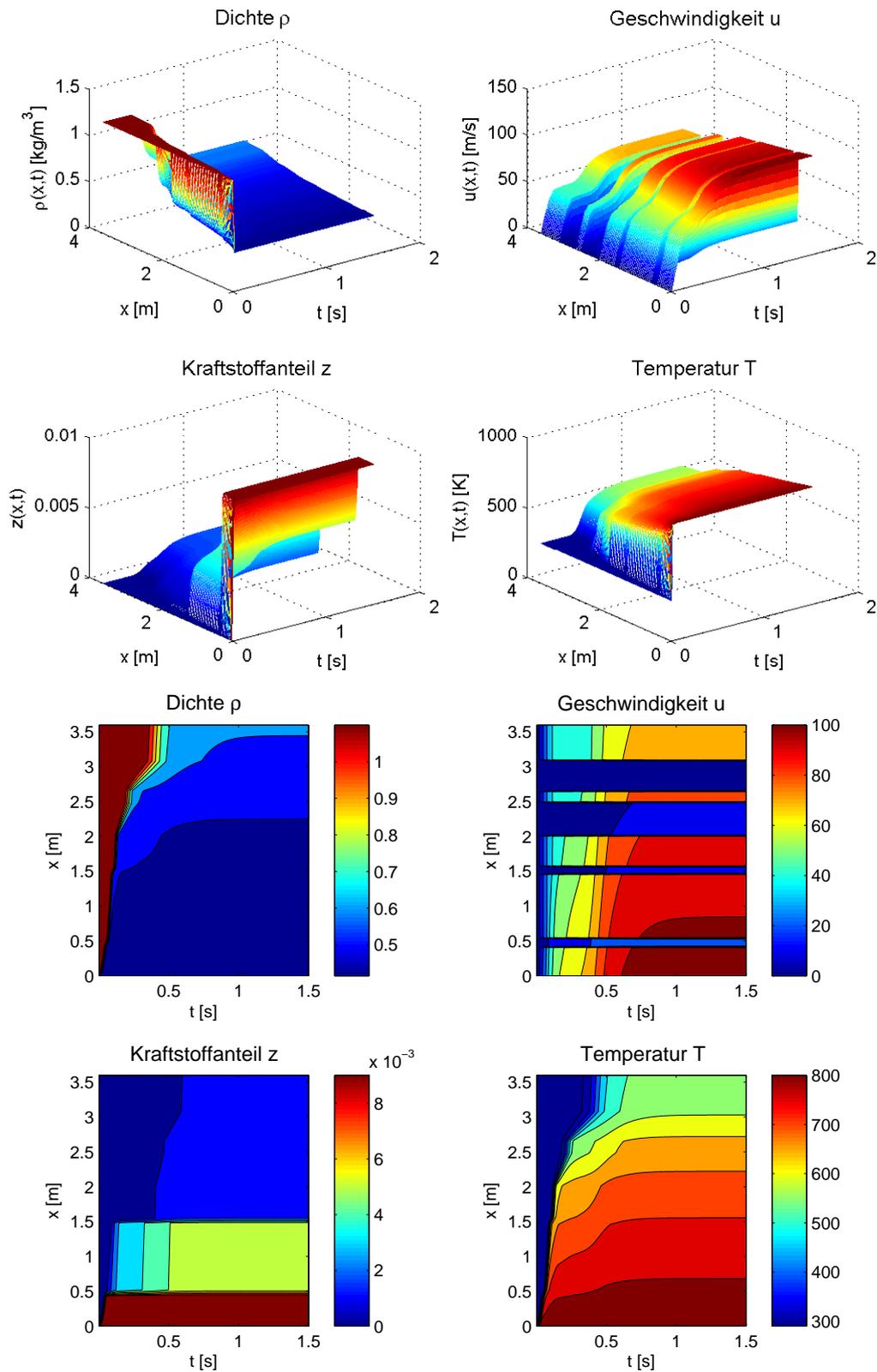


Abbildung 4.24.: Simulationsreihe VI: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $q_0 = 10^6$

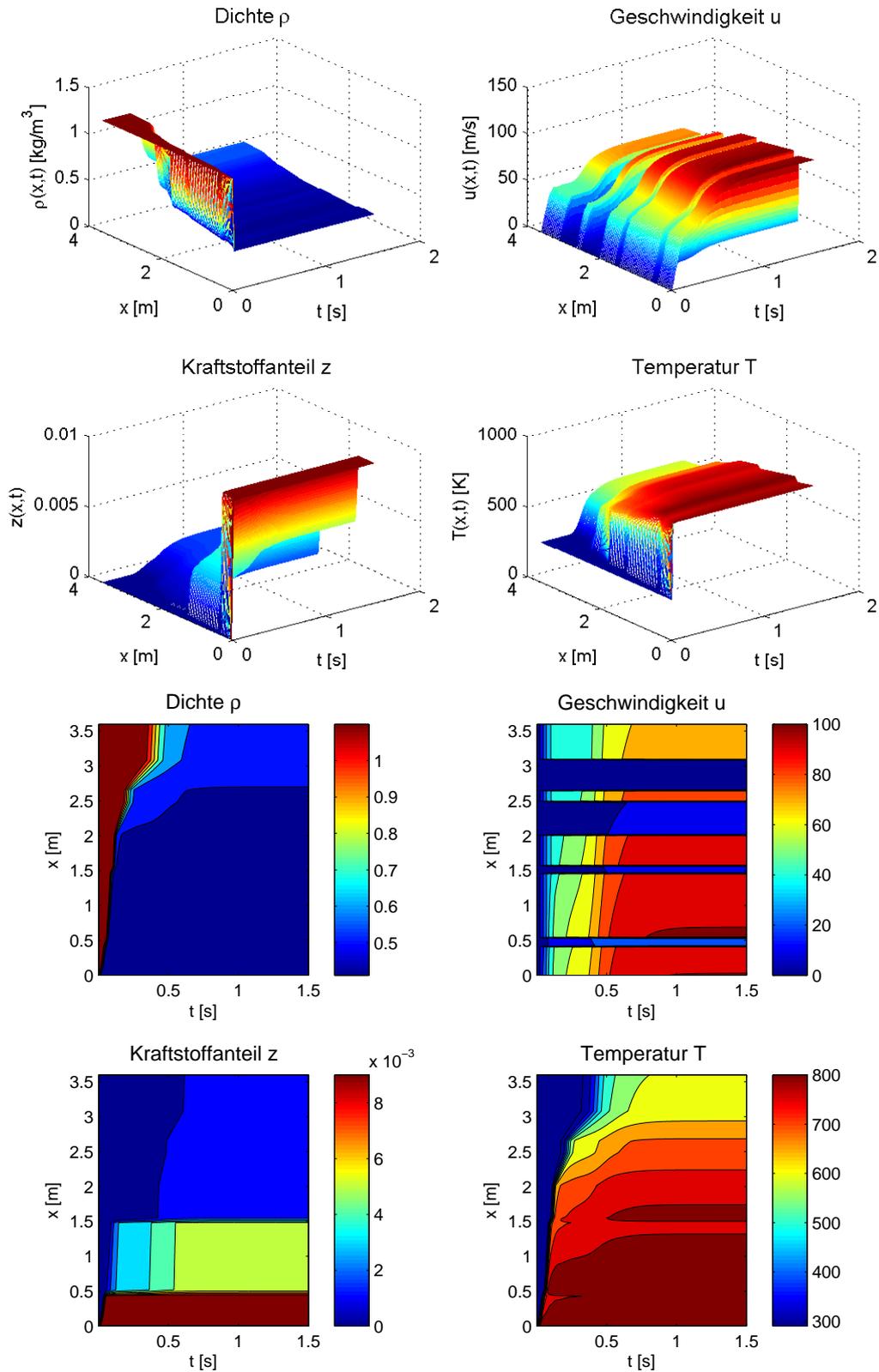


Abbildung 4.25.: Simulationsreihe VI: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $q_0 = 10^7$

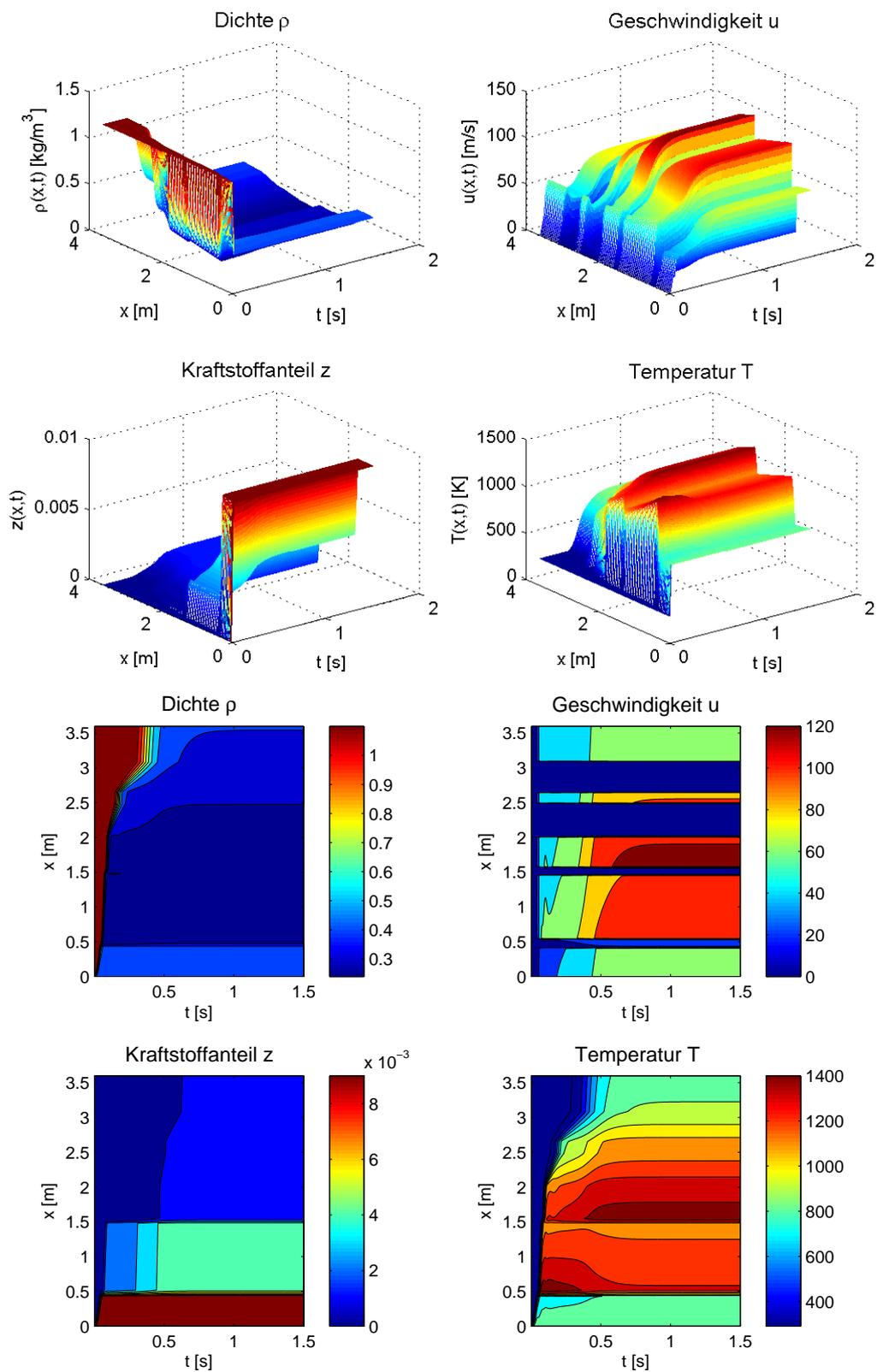


Abbildung 4.26.: Simulationsreihe VI: Die numerischen Lösungen von ρ , u , z und T für $q_0 = 10^8$

4.3. Vergleich mit dem Modell von Lacoste und Natalini

Um die Güte unseres Modells abschätzen zu können, wollen wir unsere Ergebnisse, die wir in dem Abschnitt 4.2 ausführlich diskutiert haben, mit den Ergebnissen von LACOSTE und NATALINI vergleichen. Diese Fragestellung ist nicht trivial, da wir durch die im Abschnitt 3.5 beschriebene Asymptotik, Teile des ursprünglichen Modells weggelassen und andere isoliert voneinander betrachtet haben. Zwar haben wir diese Selektion auf der Grundlage der Größenordnung der auftauchenden Terme begründet, doch kann man nicht ausschließen, dass die grobe Lösungsstruktur sich ändert, zumal man weder im einen noch im anderen Fall analytische Aussagen zum Lösungsverhalten machen kann.

Wir wollen unser Modell mit der Abschlussimulation von [LN04] vergleichen, die in der Abbildung 4.27 dargestellt wird.

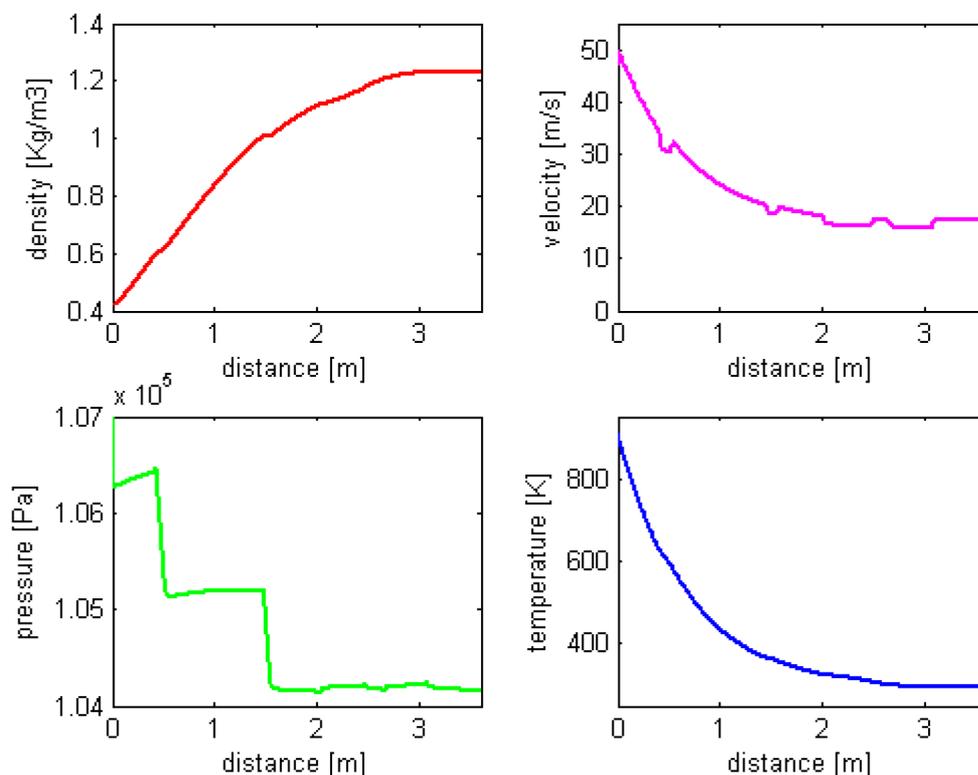


Abbildung 4.27.: Simulationsergebnisse von dem Modell von LACOSTE und NATALINI (vgl. [LN04], S. 35)

Dabei wurden laut [LN04] als Anfangswerte für alle \tilde{x}

$$\tilde{\rho}^a(\tilde{x}) = 1.2149 \text{ kg m}^{-3} \quad \tilde{u}^a(\tilde{x}) = 0 \text{ m s}^{-1} \quad \tilde{z}^a(\tilde{x}) = 0$$

und als Randwerte am Auspuffeingang für alle \tilde{t}

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}^l &= 0.4148 \text{ kg m}^{-3} & \tilde{p}^l &= 1.0874 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ \tilde{z}^l &= 0.1 & \tilde{u} &= 40.091 \text{ m s}^{-1}\end{aligned}$$

gewählt.

Für unsere Vergleichssimulation wählen wir zwar die gleichen Anfangswerte, müssen aber einen anderen Satz von Randbedingungen wählen. Wir benötigen statt der Randbedingungen an die Geschwindigkeit, eine zweite für den Druck. Da die Druckdifferenz in der Abbildung 4.27 etwa $0.02 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ beträgt, lauten die von uns gewählten Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}^l &= 0.4148 \text{ kg m}^{-3} & \tilde{p}^l &= 1.02 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ \tilde{z}^l &= 0.1 & \tilde{p}_0 &= 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}.\end{aligned}$$

Die mit dem Programm `auspuff.m` errechneten Simulationsergebnisse sind in der Abbildung 4.28 dargestellt.

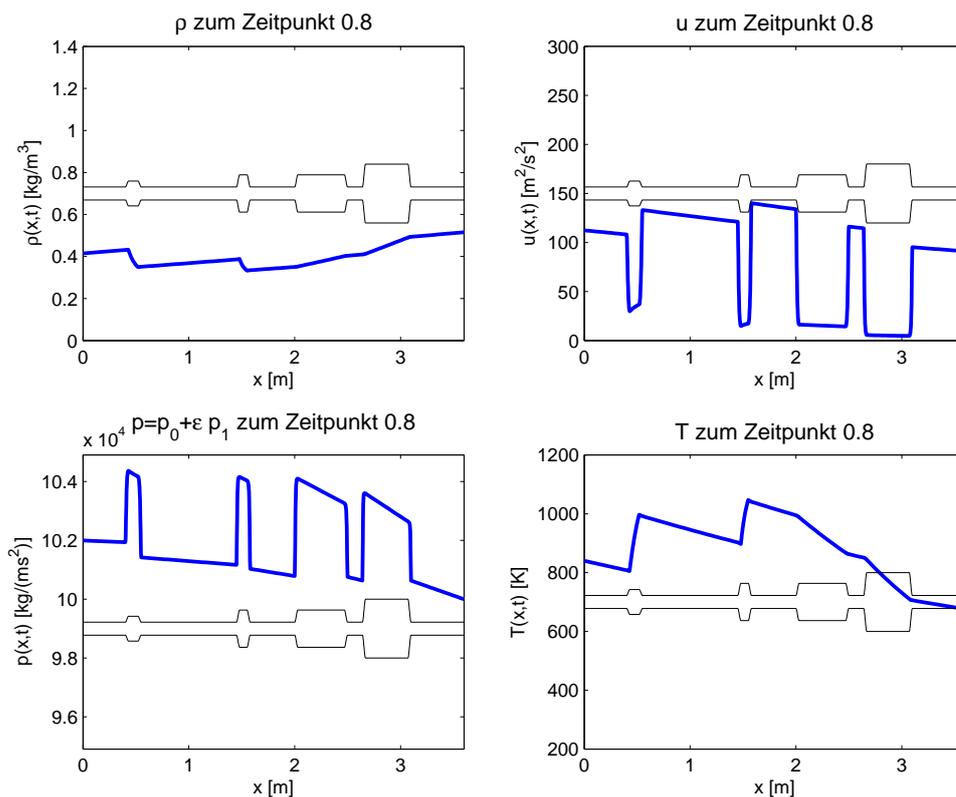


Abbildung 4.28.: Ergebnisse für ρ , u , p und T nach $t = 0.8$ Sekunden

Bevor wir die Unterschiede und Gemeinsamkeiten genauer diskutieren wollen, müssen wir zunächst darauf hinweisen, dass wir den Aufzeichnungen in [LN04] nicht entnehmen können,

nach welcher Zeit diese Ergebnisse zustande kommen. Auch fehlt eine Grafik für Restmenge Kraftstoff. Ebenfalls unklar ist, welche Werte für die Aktivierungsenergie E^+ und die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0 verwendet wurden. Den Wert für q_0 entnehmen wir aus [Pet07].

Parameterbezeichnung	Wert
Katalysatorreibung C	800
Wärmedurchgangskoeffizient h	150
Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0	400
Aktivierungsenergie E^+	600
Wärmefreisetzungsrate q_0	$5 \cdot 10^6$

Tabelle 4.7.: Parameterwerte für die Vergleichssimulation

Wir diskutieren nun die Unterschiede der numerischen Lösungen anhand der Abbildungen 4.27 und 4.28.

- **Numerische Lösungen für die Dichte ρ und die Temperatur T**

Beim Betrachten der numerischen Lösungen für die Dichte ρ , fallen sofort zwei Unterschiede auf. Zum einen erkennt man in der Lösung von LACOSTE und NATALINI kaum die exotherme Reaktion der Kraftstoffrestmenge in den Katalysatoren, wohingegen sie bei der Lösung unseres Modells sehr gut sichtbar ist. Zum anderen findet die durch die Wärmeabgabe mit der Wand verursachte Verdichtung des Gases in unserer Lösung in einem viel geringeren Umfang statt. Dafür gibt es zwei Ursachen. Erstens, ist der von uns gewählte Wert für den Wärmedurchgangskoeffizienten aus den in Abschnitt 4.2.4 erläuterten Gründen geringer. Zweitens, ist die Geschwindigkeit bei uns deutlich höher, wodurch die Wärmeabgabe an die Wand geringer ausfällt.

Analog folgt der Vergleich für die numerischen Lösungen der Temperatur T .

- **Numerische Lösungen für die Geschwindigkeit u**

Hier erkennen wir noch weitaus größere Unterschiede in den Lösungen. So fällt zunächst auf, dass die Geometrie des Auspuffs, sich in einem ganz anderem Umfang in der numerischen Lösung für u niederschlägt. Weiterhin ist in unserer Lösung für u zwar auch eine Geschwindigkeitsabnahme, verschuldet durch die Wärmeabgabe an die Rohrwand, zu erkennen, doch sieht man bei unserer Lösung noch, dass die Geschwindigkeit in den Katalysatoren aufgrund der exothermen Reaktion zunimmt.

Schließlich ist die durch die Druckdifferenz verursachte Geschwindigkeit in unserer Simulation deutlich höher, als jene bei LACOSTE und NATALINI, welche als Randbedingung vorgeschrieben wurde.

- **Numerische Lösungen für den Druck ρ**

Der Druck unterscheidet sich am deutlichsten von allen Zustandsgrößen. Dieser scheint bis auf die Katalysatorintervalle nahezu konstant zu sein. Ganz anders verhält sich die numerische Lösung für den Druck in unserem Fall. Wie auch in dem Geschwindigkeitsprofil ist die Geometrie des Auspuffrohres deutlich erkennbar. Außerdem sehen wir bei unserer Lösung kaum Druckänderungen in den Katalysatoren.

- **Numerische Lösungen für den Kraftstoffanteil z**

Zwar liegen für diese Simulation keine Grafiken für den Kraftstoffanteil z vor, jedoch wird in [LN04] das numerische Lösungsverhalten von z in anderen Simulationen untersucht. Bei dieser Zustandsgröße stimmen unsere Ergebnisse sowohl qualitativ, als auch quantitativ sehr gut mit den Ergebnissen von LACOSTE und NATALINI überein.

Abschließend kann man sagen, dass für die numerischen Lösungen für ρ , u und T qualitativ es größtenteils Übereinstimmungen gibt, wobei quantitativ mit ähnlichen Randdaten und Modellparametern verschieden Effekte verschieden stark zur Geltung kommen.

Wir versuchen nun zum Schluss einen Satz von Randbedingungen und Modellparametern zu finden, um Ergebnisse zu erhalten, die möglichst nah an denen von [LN04] liegen. Dazu wählen wir als Randbedingungen

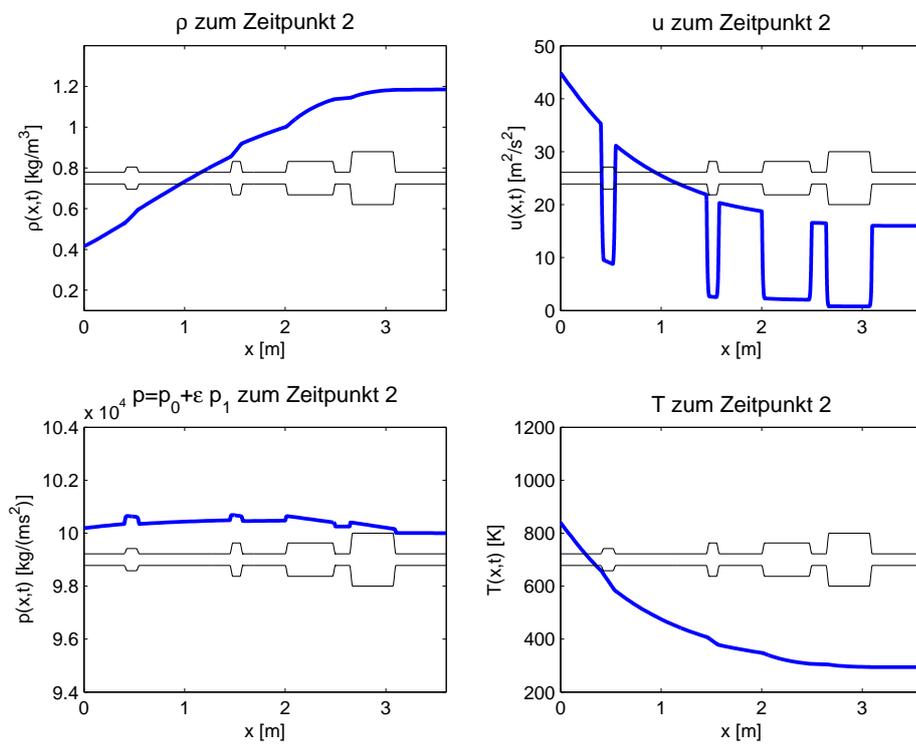
$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^l &= 0.4148 \text{ kg m}^{-3} & \tilde{p}^l &= 1.0019 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ \tilde{z}^l &= 0.1 & \tilde{p}_0 &= 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}. \end{aligned}$$

und als Modellparameter

Parameterbezeichnung	Wert
Katalysatorreibung C	800
Wärmedurchgangskoeffizient h	400
Reaktionsgeschwindigkeitskonstante K_0	400
Aktivierungsenergie E^+	600
Wärmefreisetzungsrate q_0	10^5

Tabelle 4.8.: Parameterwerte für die Vergleichssimulation II

Diese Simulation ist der von LACOSTE und NATALINI (vgl. Abbildung 4.27) näher. Deutlich Unterschiede finden sich jedoch weiterhin neben der stärkeren Ausprägung der geometrischen Struktur des Auspuffrohres im Geschwindigkeitsprofil, in der numerischen Lösung für den Druck. Auch hier ist die Geometrie des Auspuffs deutlich zu erkennen, im Gegensatz zum Bild von LACOSTE und NATALINI. Die Wölbung der Lösung für den Druck in der Abbildung 4.29, ist numerischen Fehlern geschuldet und nimmt mit der Verringerung von $\Delta_x^{\text{Übergang}}$ ab.

Abbildung 4.29.: Ergebnisse für ρ , u , p und T nach $t = 2$ Sekunden

5. Abschlussbetrachtung

Ausgehend von den Eulergleichungen der Gasdynamik unter Berücksichtigung der physikalischen Phänomene, Wandreibung, Wärmeabgabe durch die Wand, Katalysatorreibung und Verbrennung von Kraftstoff in den Katalysatoren, haben wir das Modell hergeleitet, welches durch LACOSTE und NATALINI (L&N) numerisch untersucht wurde. Wir haben anschließend die Tatsache ausgenutzt, dass die Machzahl des Systems klein ist und mit diesem Wissen - mit der sogenannten *Machzahl-Asymptotik* - ein Grenzmodell hergeleitet. Anders als im Modell von L&N wollten wir keine Randbedingung an die Geschwindigkeit vorschreiben, sondern eine zweite Randbedingung für den Druck festschreiben. Dieser Umstand zwang uns das Grenzmodell dahingehend umzuschreiben, als das unser neues Modell kompatibel mit dem gewählten Satz von Randbedingung sein sollte. Die Asymptotik führte in einem gewissen Maße zur Entkoppelung der physikalischen Zustandsgrößen, die eine einfache numerische Behandlung der Gleichungen erlaubt haben. Durch Finiten Differenzen Verfahren kamen wir schnell zu Ergebnisse.

Mit Hilfe von mehreren Simulationsreihen haben wir das Modell getestet und feststellen können, dass das Modell nachvollziehbare und physikalisch sinnvolle Ergebnisse produziert. Auch hinsichtlich der Katalysatoraufwärmung kann unser Modell darstellen, wie sich die Verbrennung des Kraftstoffs auf die Lösungsverläufe unserer Zustandsgrößen, insbesondere der Temperatur, auswirkt.

Qualitativ stimmt das Verhalten unserer Lösungen in nahezu jeder Zustandsgröße mit Ausnahme des Druckes, mit den Lösungen von L&N überein. Jedoch gab es bei den quantitativen Verläufen sichtbare Unterschiede. So spiegelt sich die Geometrie des Auspuffs deutlich stärker in unseren Lösungen, als in den Lösungen von L&N, wider.

Auch die numerische Lösung für den Druck bei L&N ist durch unser Modell nicht reproduzierbar. Entgegen unserer Lösung, macht man bei L&N den lokal Druckabfall durch die starke Reibung in den Katalysatoren als dominanten Effekt aus, welche sich bei uns durch die Integration über das ganze Intervall streckt und somit lokal nicht wieder zu erkennen ist. Abschließend bleibt festzuhalten, dass wir mit dem Satz von Randbedingungen und Modellparametern, die uns [LN04] liefert, die Lösungen (mit Ausnahme des Druckes) nur qualitativ und nicht quantitativ wieder geben können. Wir haben aber gesehen, dass wir durch eine andere Wahl von Randbedingungen sowie Modellparametern, Ergebnisse produzieren können, die denen von L&N sehr nahe sind, wobei dies erneut nicht für den Druckverlauf gilt.

Ein weiterer möglicher Ansatz wäre, die Gasströmung durch das Auspuffrohr mit seinen verschiedenen Bestandteilen als Netzwerk aufzufassen. Dies hätte gleich zwei Vorteile. Zum einen müsste man keine Querschnittsflächenfunktion A in den Gleichungen mitführen. Auch in der Numerik müsste man an den Übergängen des Auspuffrohres nicht so fein rechnen und könnte somit Rechenzeit sparen. Zum zweiten könnte man aufgrund der zum Teil lokal vor-

herrschenden Phänomene andere asymptotische Modelle auf den Teilstücken des Auspuffrohrs erhalten. Dies unterstützen würden auch die deutlichen Unterschiede in der Geschwindigkeit, die zwischen den Rohrstücken mit großen beziehungsweise kleinen Querschnittsflächen herrschen.

Literaturverzeichnis

- [AS09] Ansorge, R. und Sonar, T.: *Mathematical Models of Fluid Dynamics*. Wiley-VCH, 2009.
- [Bau10] Bauer, Maria: *Modellierung und Simulation eines Energy Towers*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 2010.
- [Gas09] Gasser, Ingenuin: *Modellieren mit partiellen Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript, Universität Hamburg, 2009.
- [GR05] Großmann, Christian und Roos, Hans Georg: *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*. Teubner, 3. Auflage, 2005.
- [GS02] Gasser, Ingenuin und Struckmeier, Jens: *An asymptotic-induced one-dimensional model to describe*. *Mathematical methods in the applied sciences*, 2002.
- [Her04] Hermann, Martin: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Oldenburg Verlag München Wien, 2004.
- [LeV92] LeVeque, Randall: *Numerical methods for conservation laws*. Birkhäuser, 1992.
- [Liu81] Liu, Tai Ping: *Transonic gas flow in a duct of varying area*. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1981.
- [LN04] Lacoste, Laure und Natalini, Roberto: *Mathematical modeling of chemical processes in exhaust pipe*. wissenschaftlicher Report (unveröffentlicht), 2004.
- [MM94] Morton, K.W. und Mayers, D.F.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1994.
- [Pet07] Petrucci, Roberta: *Un modello matematico di combustione dei gas di scarico in marmitta catalitiche*. Diplomarbeit, Roma Tre - Università degli studi, 2007.
- [Ris96] Rist, Dieter: *Dynamik realer Gase*. Springer, 1996.
- [vBS05] Basshuysen, Richard van und Schäfer, Fred: *Handbuch Verbrennungsmotor*. Vieweg, 2005.
- [Whi74] Whitham, Gerald Beresford: *Linear and Nonlinear Waves (Pure and Applied Mathematics)*. Wiley-Interscience, 1974.

Symbolverzeichnis

1. Variablen und Funktionen

A	Querschnittsflächenfunktion in $[\text{m}^2]$
K	Arrheniusgesetz
p	Druck in $[\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}]$
r	Radiusfunktion in $[\text{m}]$
t	zeitliche unabhängige Variable in $[\text{s}]$
T	Temperatur in $[\text{K}]$
T_{Wand}	Wandtemperatur in $[\text{K}]$, arithmetisches Mittel aus T und T^a
\mathbf{u}	Geschwindigkeitsvektor in $[\text{m s}^{-1}]$
u	Geschwindigkeit entlang des Rohres in $[\text{m s}^{-1}]$
w	Umfangsfunktion in $[\text{m}]$
x	örtliche unabhängige Variable entlang des Rohres in $[\text{m}]$
$x^{(2)}, x^{(3)}$	verbleibende örtliche Komponenten, jeweils in $[\text{m}]$
y	beliebige physikalische Zustandsgröße
z	Kraftstoffanteil im Gasgemisch

2. Parameter

C	Reibungskoeffizient für die Katalysatorreibung in $[\text{s}^{-1}]$
c	Schallgeschwindigkeit in $[\text{m s}^{-1}]$
C_f	Rohrreibungskoeffizient
c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen in $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}]$
E^+	Aktivierungstemperatur im Arrheniusgesetz in $[\text{K}]$
h	Wärmedurchgangskoeffizient in $[\text{kg s}^{-3} \text{K}^{-1}]$
K_0	Reaktionsgeschwindigkeitskonstante im Arrheniusgesetz
M	Machzahl
p_0	Druck in nullter ε -Ordnung in $[\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}]$
p_{ex}	Außendruck in $[\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}]$
q_0	Wärmefreisetzungsrate
R	Ideale Gaskonstante $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}]$
Re	Reynoldszahl
T_{ex}	Außentemperatur in $[\text{K}]$

3. Griechische Buchstaben

γ	Isentropenexponent
ε	kleiner Parameter (= γM^2)
η	dynamische Viskosität
λ	Lambda-Verhältnis <i>oder</i> Reibungskoeffizient
ρ	Dichte in [kg m ⁻³]
ρ_{ex}	Außendichte
χ	Charakteristische Funktion für die Katalysator-Intervalle
Ω	betrachtete Teilmenge des Auspuffrohres

4. Numerische Parameter

Δ_t	Schrittweite in der Zeit
Δ_x	Schrittweite im Ort
t_{max}	Simulationsdauer
t^n	n -ter Zeitpunkt
x_j	j -ter Ortspunkt
y_j^n	numerische Näherungslösung von $y(t^n, x_j)$

5. Indizes

y_r	Referenzwert
y^a	Anfangswert
y^l	Randwert links

6. Besondere Zeichen

\tilde{y}	dimensionsbehaftete Zustandsgröße
-------------	-----------------------------------

Abbildungsverzeichnis

2.1. Verbrennungsmotor	4
2.2. Temperaturverlauf im Katalysator mit/ohne Sekundärluft (Quelle: [vBS05], S. 711)	6
2.3. Vor- und Hauptkatalysator	7
2.4. Auspuffrohr mit all seinen Bestandteilen	7
3.1. Geometrie des Auspuffs	10
3.2. Kubisches Polynom $\tilde{r}_i(\tilde{x})$ im Intervall $[\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$	11
3.3. Die Funktion \tilde{r} und ihre Spiegelung	11
3.4. Die Menge Ω	12
3.5. Arrhenius-Kurve für $K_0 = 0.6$ und $\tilde{E}^+ = 600K$	15
3.6. Stationäre Lösung von p	35
3.7. Stationäre Lösung von u	35
3.8. Stationäre Lösung von p mit Katalysatorreibung	37
3.9. Stationäre Lösung von u mit Katalysatorreibung	37
4.1. Simulationsreihe I: Dreidimensionale Darstellung der numerischen Lösungen von ρ, u, z und T	45
4.2. Simulationsreihe I: Kontur-Darstellung der numerischen Lösungen von ρ, u, z und T	45
4.3. Simulationsreihe I: Numerische Lösung für u nach $t = 0.8$ Sekunden	46
4.4. Simulationsreihe I: Numerische Lösung für p nach $t = 0.8$ Sekunden	47
4.5. Simulationsreihe II: Numerische Lösungen für u nach $t = 0.8$ Sekunden	48
4.6. Simulationsreihe II: Zusammenhang zwischen Differenz der Druckranddaten $p^l - p_0$ und der maximalen Geschwindigkeit u_{max}	48
4.7. Simulationsreihe III: Numerische Lösungen für u nach $t = 0.8$ Sekunden	49
4.8. Simulationsreihe III: Numerische Lösung für u mit $C = 0$	50
4.9. Simulationsreihe III: Numerische Lösung für u mit $C = 400$	50
4.10. Simulationsreihe III: Numerische Lösung für u mit $C = 800$	50
4.11. Simulationsreihe IV: Numerische Lösungen für ρ, u, z und T nach $t = 1.5$ Sekunden	52
4.12. Simulationsreihe IV: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $h = 0$	53
4.13. Simulationsreihe IV: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $h = 50$	54
4.14. Simulationsreihe IV: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $h = 100$	55
4.15. Simulationsreihe IV: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $h = 150$	56
4.16. Simulationsreihe V: Numerische Lösungen für ρ, u, z und T nach $t = 0.8$ Sekunden	59

4.17. Simulationsreihe V: Numerische Lösungen für u nach $t = 0.8$ Sekunden . . .	59
4.18. Simulationsreihe V: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $K_0 = 0$	60
4.19. Simulationsreihe V: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $K_0 = 100$	61
4.20. Simulationsreihe V: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $K_0 = 200$	62
4.21. Simulationsreihe V: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $K_0 = 400$	63
4.22. Simulationsreihe VI: Numerische Lösungen für ρ, u, z und T nach $t = 1.5$ Sekunden	64
4.23. Simulationsreihe VI: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $q_0 = 0$	65
4.24. Simulationsreihe VI: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $q_0 = 10^6$	66
4.25. Simulationsreihe VI: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $q_0 = 10^7$	67
4.26. Simulationsreihe VI: Die numerischen Lösungen von ρ, u, z und T für $q_0 = 10^8$	68
4.27. Simulationsergebnisse von dem Modell von LACOSTE und NATALINI (vgl. [LN04], S. 35)	69
4.28. Ergebnisse für ρ, u, p und T nach $t = 0.8$ Sekunden	70
4.29. Ergebnisse für ρ, u, p und T nach $t = 2$ Sekunden	73
A.1. Stationäre Lösung von ρ, u, p und z	89

Tabellenverzeichnis

3.1. Daten zur Beschreibung der Auspuffrohr-Geometrie	10
3.2. Referenzgrößen und dazugehörige Referenzwerte	22
3.3. Modellparameter	23
3.4. Größenordnungen der Vorfaktoren	25
4.1. Parameterwerte der Simulationsreihe I	44
4.2. Werte der Simulationsreihe II: Variation im Randdruck p^l	47
4.3. Parameterwerte der Simulationsreihe III: Variation in C	49
4.4. Parameterwerte der Simulationsreihe IV: Variation in h	51
4.5. Parameterwerte der Simulationsreihe V: Variation in K_0	57
4.6. Parameterwerte der Simulationsreihe VI: Variation in q_0	64
4.7. Parameterwerte für die Vergleichssimulation	71
4.8. Parameterwerte für die Vergleichssimulation II	72

A. Anhang

A.1. Dynamische Viskosität

Die dynamische Viskosität η berechnen wir auf Grundlage der in [LN04] aufgestellten Formel:

$$\eta = \frac{3.3 \cdot 10^{-7} T^{0.7}}{1.027},$$

wobei T für die Temperatur des Fluids steht.

A.2. Programm Informationen

Alle Programme zur numerischen Simulation unseres Modells wurden mit MATLAB (Version: 7.10.0.499 (R2010a)) geschrieben. Es folgt eine kurz Erläuterung der auf der beigefügten CD gespeicherten Programme.

- Das Programm `auspuff.m` berechnet die Lösungen des diskreten Problems (4.7) und stellt diese in verschieden 2D und 3D-Grafiken dar. Inputwerte die das Programm benötigt, sind *Schrittweiten*, *Modellparameterwerte*, *Randdaten* und die Information ob *mit* oder *ohne variablen Querschnitt* gerechnet werden soll. Zudem besteht die Möglichkeit durch eine String-Input einen Parameter zu wählen, der variiert werden soll. In diesem Fall muss noch ein Vektor eingegeben werden, der die verschiedenen Parameterwerte enthält. Schließlich lässt sich der grafische Output durch einige Optionen bedienen. Die erstellten 2D und 3D Grafiken werden in eigens dafür angelegten Ordnern im `*.eps`- und `*.fig`-Format abgespeichert.
- Das Programm `auspuff_control.m` dient zur Benutzung des Programms `auspuff.m`. Dort kann man für mehrere Simulationsreihen Parameterwerte setzen und schließlich diese nacheinander durchführen. Dort finden sich eine detaillierte Beschreibungen zur Wahl und Bedeutung der verschiedenen Inputwerte von `auspuff.m`.
- Das Programm `plinks_umax_abhaengigkeit.m` führt mehrere Simulationen mit verschieden Druckrandwerten aus und erstellt ein Diagramm in dem die Randdruckdifferenzen gegen die jeweils maximale Geschwindigkeit aufgetragen wird.
- Das Programm `stationaerloesungen.m` dient zur grafischen Darstellung der in Abschnitt 3.8 berechneten stationären Lösungen. Dabei gibt es noch die Möglichkeit mit oder ohne Katalysatorreibung zu rechnen.

- Das Programm `stationaerloesungen_2.m` dient zur grafischen Darstellung der stationären Lösungen des Problems (A.1), also dem Modell in dem der Term ' $A_x p$ ' Berücksichtigung findet.

A.3. Der Term $A_x p$ in der Impulsbilanz

Stünde in der Impulsbilanz $(Ap)_x$ statt Ap_x so würde dies sich deutlich auf das Lösungsverhalten des stationären Problems auswirken. Betrachten wir das stationäre, skalierte System ohne Katalysatorreibung, ohne Verbrennung von Kraftstoff und ohne Wärmeabgabe an die Rohrwand:

$$\begin{aligned}
 (A\rho u)_x &= 0 \\
 (Ap_0)_x &= 0 \\
 (A\rho u^2)_x + (Ap_1)_x &= -F_0 w \rho \frac{u^2}{2} \\
 (A\rho u^2)_{xx} + (Ap_1)_{xx} &= -F_0 (w \rho \frac{u^2}{2})_x \\
 (Ap_0 u)_x &= 0 \\
 (A\rho u z)_x &= 0 \\
 p_0 &= \rho T
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $p_0 = c_{p_0}/A$, womit wir sofort aus der fünften Gleichung $u = c_u$ erhalten, wobei c_{p_0} und c_u konstant sind. Damit folgt dann aus der ersten Gleichung $\rho = c_\rho/A$ und $z = c_z$. Der Temperaturverlauf wäre mit $T = p_0/\rho = c_{p_0}/c_\rho$ konstant. Durch die Randbedingungen $p_0(0) = p_{ex}$, $\rho(0) = \rho^l$ und $z(0) = z^l$ können wir die Konstanten c_{p_0} , c_ρ und c_z bestimmen. Für p_1 erhält man aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung die Lösung

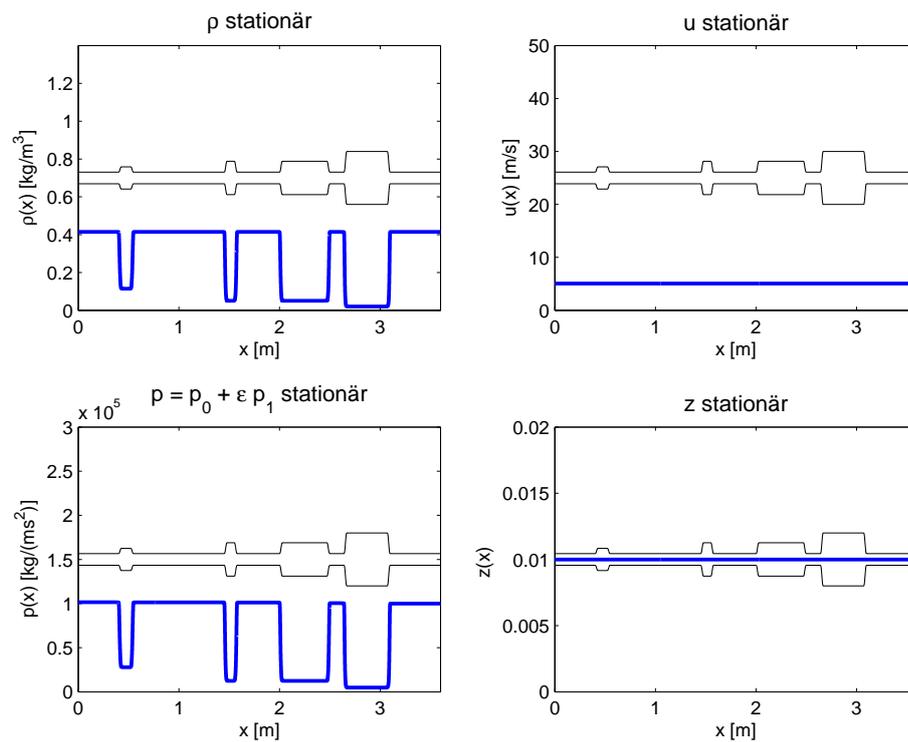
$$p_1(x) = \frac{k_2 + k_1 \cdot x + \frac{c_u^2 \rho^l}{2} \int_0^x \frac{F_0}{r(y)} dy}{r(x)^2},$$

wobei wir durch die beiden Randbedingungen an p_1

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -\frac{r(0)^2(p^l - p_{ex})}{\varepsilon} - \frac{c_u^2 \rho^l}{2} \int_0^1 \frac{F_0}{r(y)} dy \\
 k_2 &= \frac{r(0)^2(p^l - p_{ex})}{\varepsilon}
 \end{aligned}$$

erhalten. Einsetzen der Lösungen in die stationäre Impulsbilanz und Integration über das Intervall $[0, 1]$ liefert

$$-\frac{r(0)^2(p^l - p_{ex})}{\varepsilon} - \frac{F_0 c_u^2 \rho^l}{2} \int_0^1 \frac{1}{r(y)} dy + \frac{c_u^2 \rho^l}{2} \int_0^1 \frac{F_0}{r(y)} dy = \frac{c_u^2 \rho^l}{2} \int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^3} dx$$

Abbildung A.1.: Stationäre Lösung von ρ, u, p und z

Auflösen nach c_u liefert

$$c_u = \sqrt{\frac{2r(0)^2(p^l - p_{ex})}{\rho^l \varepsilon \int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^3} dx}}$$

Wir erhalten also insgesamt die Lösungen auf dem Intervall $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{r(0)^2}{r(x)^2} \rho^l \\ z(x) &= z^l \\ u(x) &= \sqrt{\frac{2r(0)^2(p^l - p_{ex})}{\rho^l \varepsilon \int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^3} dx}} \\ p(x) &= \frac{r(0)^2}{r(x)^2} \left[p^l - 3(p^l - p_{ex}) \cdot x + \frac{2(p^l - p_{ex})}{\int_0^1 \frac{F_0}{r(x)^3} dx} \int_0^x \frac{F_0}{r(x)^3} dx \right] \end{aligned}$$

Dies würde bedeuten wir hätten eine konstante Lösung für die Geschwindigkeit. Wir haben die Lösungen für denselben Satz von Randbedingungen wie im Abschnitt 3.8 grafisch dargestellt. Die Abbildung A.1 wurde mit dem Programm `stationaerloesungen_2.m` erstellt.