Das Zornsche Lemma

Quellen: [De, Kap. 2.7], [Eb, Kap. VIII.3]

Erinnerung: Das ZF-Axiomensystem hat 8 Axiome, das ZFC-Axiomensystem enthält zusätzlich das Auswahlaxiom:

9. *Auswahlaxiom.* Wenn eine Menge F aus paarweise disjunkten, nicht-leeren Mengen besteht, dann gibt es eine Menge M, die genau ein Element aus jedem Element von F enthält.

Sei M eine Menge. Eine *Halbordnung* auf M ist eine Relation $\leq$ auf M, so dass

1. (Reflexiv) $a \leq a$ für alle $a \in M$.
2. (Antisymmetrisch) Für alle $a, b \in M$ gilt: $a \leq b \wedge b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$.
3. (Transitiv) Für alle $a, b, c \in M$ gilt $a \leq b \wedge b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$.

Eine Halbordnung heißt *Totalordnung* (oder kurz *Ordnung*), falls zusätzlich gilt

4. (Totalität) Für alle $a, b \in M$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$.

Eine total geordnete Untermenge einer halbgeordneten Menge $(M, \leq)$ nennte man *Kette* (in M). Insbesondere ist die leere Menge eine Kette in M.

Z.B.: Sei X eine Menge. Für $A, B \subset X$ sei

$$A \leq B :\Leftrightarrow A \subset B \ .$$

Dies ist eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Hat X mehr als zwei Elemente, so ist dies keine totale Ordnung. (Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$; setze $A = \{x\}$ und $B = \{y\}$, dann weder $A \leq B$ noch $B \leq A$.)
Ein Beispiel für eine Kette in $\mathcal{P}(X)$ ist eine Familie von Inklusionen

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \dots$$

Sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Ein Element $m \in M$ heißt *maximales Element*, wenn für alle $x \in M$ gilt: $m \leq x \;\Rightarrow\; m = x$.
Sei C eine Kette in M. Ein $s \in M$ heißt *obere Schranke für C*, falls für jedes $c \in C$ gilt: $c \leq s$.

Bemerkung: Maximale Elemente sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Lemma von Zorn. Sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge, so dass jede Kette in M eine obere Schranke in M hat. Dann besitzt M ein maximales Element.

Der Beweis ist enthalten in:

Satz. (ZF + Lemma von Zorn) ist äquivalent zu (ZF + Auswahlaxiom)

Beweis.
$\Rightarrow$: Das Auswahlaxiom besagt:

> *Wenn eine Menge F aus paarweise disjunkten, nicht-leeren Mengen besteht, dann gibt es eine Menge M, die genau ein Element aus jedem Element von F enthält.*

Sei $X = \bigcup F$. Setze

$$Z := \{N \subset X | \text{ jedes Element von } N \text{ ist genau in einem Element von } F \text{ enthalten } \} .$$

Z ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$. Mengeninklusion $\subset$ definiert eine Halbordnung auf Z. Sei C eine Kette in Z. Setze $S := \bigcup C$. Dann $S \in \mathcal{P}(X)$, und es gilt sogar:

Beh.: $S \in Z$.
Bew.: (Ausgelassen – ist nicht so schwer.)

Per Konstruktion $c \subset S$ für alle $c \in C$, und somit ist S eine obere Schranke von C in Z. Nach dem Lemma von Zorn hat Z ein maximales Element M.

Beh.: M enthält aus jedem Element von F genau ein Element.
Bew.: Angenommen, es gäbe ein $U \in F$, so dass $M \cap U = \emptyset$. Wähle ein $x \in U$. Setze $M' := M \cup \{x\}$. Dann $M' \in Z$ und $M \subset M'$, aber $M' \neq M$. Widerspruch zur Maximalität von M.

$\Leftarrow$: (Ausgelassen – länger, schwieriger und führt zu weit von der linearen Algebra weg.)

$\square$

Lemma für Basisergänzungs– und Basisauswahlsatz

Quelle: [La, Kap. III.5]

Lemma. Sei V ein K-Vektorraum. Sei $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V und sei $L \subset I$ eine Teilmenge, so dass $(v_i)_{i\in L}$ linear unabhängig ist. Dann gibt es ein B mit $L \subset B \subset I$, so dass $(v_i)_{i\in B}$ eine Basis von V ist.

Beweis.
Das Lemma von Zorn besagt:

> *Sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge, so dass jede Kette in M eine obere Schranke in M hat. Dann besitzt M ein maximales Element.*

Sei

$$M := \{J \mid L \subset J \subset I \text{ und } (v_i)_{i\in J} \text{ ist linear unabhängig } \} \; .$$

Mengeninklusion $\subset$ definiert eine Halbordnung auf M. Sei C eine Kette in M. Setze $S := \bigcup C$. S ist eine Teilmenge von I.

Beh.: $S \in M$.
Bew.: $L \subset S \subset I$ ist klar. Noch zu zeigen: $(v_i)_{i\in S}$ ist linear unabhängig. Sei $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset S$ eine beliebige endliche Teilmenge. Seien $k_1, \dots, k_m \in K$, so dass

$$k_1 v_{i_1} + k_2 v_{i_2} + \cdots + k_m v_{i_m} = 0 \; .$$

Da jedes $i_j \in S$ ist, gibt es $P_1, \dots, P_m \in C$ mit $i_j \in P_j$. Da C eine Kette ist, ist eines der P_j maximal. Sei P dieses P_j. Dann $P_i \subset P$ für $i = 1, \dots, m$ und somit:

$$\{i_1, \dots, i_m\} \subset P \; .$$

Da $(v_i)_{i\in P}$ linear unabhängig ist (denn $P \in M$), ist auch $(v_{i_1}, \dots, v_{i_m})$ linear unabhängig. Somit ist $k_j = 0$ für $j = 1, \dots, m$.

Die Behauptung zeigt, dass S eine obere Schranke für C in M ist. Nach dem Lemma von Zorn hat M ein maximales Element $B \in M$.

Beh.: $(v_i)_{i\in B}$ ist eine Basis von V.
Bew.: Per Konstruktion ist $(v_i)_{i\in B}$ linear unabhängig. Es bleibt zu zeigen, dass $(v_i)_{i\in B}$ ein Erzeugendensystem ist. Angenommen, $\mathrm{span}_K(v_i)_{i\in B} \neq V$.
Da nach Voraussetzung $\mathrm{span}_K(v_i)_{i\in I} = V$, muss es ein $a \in I$ geben, so dass $v_a \notin \mathrm{span}_K(v_i)_{i\in B}$. Insbesondere gilt $a \notin B$. Setze $B' = B \cup \{a\}$. Dann ist auch $(v_i)_{i\in B'}$ linear unabhängig, d.h. $B' \in M$. Aber $B \subset B'$ und $B \neq B'$. Widerspruch zur Maximalität von M. □

[De] Devlin, *The joy of sets*, 2nd ed., Springer 1993.
[Eb] Ebbinghaus, *Einführung in die Mengelehre*, Spektrum 2003.
[La] Lang, *Algebra*, Springer 2002.