

Das Zermelo-Fraenkel'sche Axiomensystem

Quelle: [De, Kap. 2.3]

1. *Extensionalitätsaxiom*. Wenn zwei Mengen die gleichen Elemente haben, sind sie gleich:

$$\forall x, y : (\forall z : z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y .$$

2. *Leermengenaxiom*. Es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält:

$$\exists x : \forall y : \neg(y \in x) .$$

(Man zeigt: diese Menge ist eindeutig, wir nennen sie die *leere Menge* \emptyset .)

3. *Unendlichkeitsaxiom*. Es gibt eine Menge M mit $\emptyset \in M$, so dass mit $m \in M$ auch $\{m\} \in M$:

$$\exists x : \emptyset \in x \wedge (\forall z : z \in x \Rightarrow \{z\} \in x)$$

4. *Potenzmengenaxiom*. Für jede Menge M gibt es eine Menge $\mathcal{P}(M)$, deren Elemente genau die Teilmengen von M sind:

$$\forall x : \exists p : \forall y : y \in p \Leftrightarrow (\forall z : z \in y \Rightarrow z \in x) .$$

5. *Vereinigungsaxiom*. Für jede Menge M gibt es eine Menge $\bigcup M$, die aus allen Elementen der Elemente von M besteht.

6. *Ersetzungsaxiom*. Sei $A(x, y)$ ein Ausdruck mit Variablen x, y , so dass es für jede Menge M eine eindeutige Menge N gibt, für die $A(M, N)$ wahr ist. Sei R eine Menge. Dann gibt es eine Menge S , die genau aus den N besteht, für die $A(M, N)$ für ein $M \in R$ wahr ist.

7. *Aussonderungsaxiom*. Sei M eine Menge und $A(x)$ ein Ausdruck mit freier Variable x . Dann gibt es eine Menge, die genau aus den Elementen $m \in M$ besteht, für die $A(m)$ wahr ist.

8. *Fundierungsaxiom*. Jede Menge M enthält ein $m \in M$ mit $m \cap M = \emptyset$.

9. *Auswahlaxiom*. Wenn eine Menge F aus paarweise disjunkten, nicht-leeren Mengen besteht, dann gibt es eine Menge M , die genau ein Element aus jedem Element von F enthält.

Axiome (1)-(8) nannte man „ZF“ und Axiome (1)-(9) nennt man „ZFC“.

[De] Devlin, *The joy of sets*, 2nd ed., Springer 1993.