Lösungshinweise zu Blatt # 12
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (3 P)

1. (a) [1P] Ja. Zum Beispiel $R = \mathbb{Z}$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Die Matrix A hat Determinante $-1 \in \mathbb{Z}^*$ und ist daher invertierbar.

   (b) [1P] Nein. Ein Gegenbeispiel ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. [1P]

   (a) Nein, denn $\det(A) = -2 \notin \mathbb{Z}^*$.

   (b) Ja, denn $\det(A) = -2 \in \mathbb{Q}^*$.

   (c) Ja. Dies folgt sofort aus b), da $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Zu Aufgabe 55 (7 P)

1. [2P] Es gilt

$$\begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_i + rz_j & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix} \overset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_i & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & rz_j & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix}$$

$$\overset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_i & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix} + r \det \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_j & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix}$$

$$\overset{D2}{=} \det \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix} + 0,$$

wobei die letzte Gleichung wegen $i \neq j$ gilt.

Die analoge Aussage für Spalten folgt aus der für Zeilen durch Transponieren unter Ausnutzung, dass $\det(A^t) = \det(A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, R)$ gilt (Satz 3.2.12).

Die Aussage ist für $i = j$ im Allgemeinen falsch, denn es gilt

$$\det\begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_i + r z_i & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix} = (1+r)\det\begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_i & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix}.$$

Ein konkretes Gegenbeispiel ist zum Beispiel die 1×1 Matrix (1) mit $r = 1$ über einem beliebigen kommutativen Ring R.

2. [2P]

   Die Aussage wird per Induktion nach n bewiesen. Jede 1×1 Matrix ist eine obere und auch untere Dreiecksmatrix, und es gilt $\det(A) = A_{1,1}$. Also gilt die Aussage für $n = 1$.

   Angenommen die Aussage gilt für $n = k$, $k \geq 1$. Sei $A \in \mathrm{Mat}(k+1 \times k+1, R)$ eine obere Dreiecksmatrix. Entwickeln nach der ersten Spalte liefert

$$\det(A) = (-1)^2 A_{1,1} \det(A_{\langle 1,1 \rangle}).$$

   Beachte, dass $A' := A_{\langle 1,1 \rangle} \in \mathrm{Mat}(k \times k, R)$ ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix ist mit $A'_{i,j} = A_{i+1,j+1}$. Insbesondere gilt also $A'_{i,i} = A_{i+1,i+1}$ und aus der Induktionsannahme folgt

$$\det(A) = A_{1,1}\det(A') = A_{1,1}\prod_{i=2}^{k+1} A_{i,i} = \prod_{i=1}^{k+1} A_{i,i}.$$

   Damit ist die Aussage für obere Dreiecksmatrizen bewiesen. Die Aussage für untere Dreiecksmatrizen folgt aus der für obere Dreiecksmatrizen durch Transponieren, wieder unter Ausnutzung von $\det(A^t) = \det(A)$.

3. [2P]

   Wir zeigen die Aussage indem wir zweimal vollständige Induktion anwenden. Wir beginnen mit der Induktion nach r, d.h. wir setzen zuerst $s = 0$. Ist $r = 0$ so ist die Aussage offensichtlich richtig. Angenommen die Aussage gilt für $r = k$, $k \geq 0$. Wir zeigen, dass sie auch für $r = k + 1$ gilt. In der Tat gilt $\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det(A_{\langle 11 \rangle}) = \det(M)$, wobei wir in der zweiten Gleichheit die Induktionsannahme benutzt haben.

   Nun erfolgt die Induktion nach s. Sei $r \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach dem eben bewiesenen gilt die Aussage für $s = 0$. Angenommen sie gilt für $s = k$, $k \geq 0$. Nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz (Satz 3.2.18) können wir die Determinante von A nach der letzten, also der $r + m + s$-ten Zeile entwickeln und erhalten

$$\det(A) = (-1)^{2(r+m+s)} \cdot 1 \cdot \det(A_{\langle r+s+m, r+s+m \rangle}) = \det(M),$$

   wobei wir in der zweiten Gleichheit wieder die Induktionsannahme benutzt haben. Damit ist die Aussage bewiesen.

4. [1P]
   Es gilt

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\boxed{\text{A}} & 0\\ 0 & \boxed{\text{B}}\end{pmatrix} &= \det\left(\begin{pmatrix}\boxed{\text{A}} & 0\\ 0 & I_{b\times b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{a\times a} & 0\\ 0 & \boxed{\text{B}}\end{pmatrix}\right)\\ &= \det\begin{pmatrix}\boxed{\text{A}} & 0\\ 0 & I_{b\times b}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}I_{a\times a} & 0\\ 0 & \boxed{\text{B}}\end{pmatrix}\\ &= \det(A)\cdot\det(B).\end{aligned}$$

   unter Ausnutzung der Multiplikativität der Determinante und 3.

Zu Aufgabe 56 (2 P)
Wir wenden das Gauß Verfahren auf A an und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&4&6&8\\0&0&3&6&9\\0&0&0&4&8\\0&0&0&0&5\end{pmatrix}$$

wobei wir ohne Zeilenvertauschungen ausgekommen sind. Daher hat obige Matrix die selbe Determinante wie A, und aus Aufgabe 55b) folgt $\det(A) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Zu Aufgabe 57 (2 P)
Per Definition ist $A^{\#}_{i,j} = (-1)^{i+j}\det A_{\langle ji\rangle}$. Wegen $A^t_{\langle ij\rangle} = (A_{\langle ji\rangle})^t$ folgt daraus also

$$A^{\#}_{j,i} = (-1)^{i+j}\det A_{\langle ij\rangle} = (-1)^{i+j}\det(A_{\langle ij\rangle})^t = (-1)^{i+j}\det A^t_{\langle ji\rangle} = (A^t)^{\#}_{i,j},$$

und damit die Behauptung.

Zu Aufgabe 58 (4 P)

1. [2P] Ist A die Nullmatrix so folgt, dass auch $A^{\#}$ die Nullmatrix ist, denn die Einträge von $A^{\#}$ sind Minoren von A, die notwendigerweise alle verschwinden.

   Angenommen A ist nicht die Nullmatrix. Es gilt stets

$$A^{\#}A = \det(A)I_n = 0, \tag{$*$}$$

   wobei 0 die $n\times n$ Nullmatrix bedeutet. Damit hat das lineare Gleichungssystem $A^{\#}x = 0$ also einen nicht-trivialen Lösungsraum (wegen $A \neq 0$), und daher folgt $\det(A^{\#}) = 0$.

2. [2P] Ist $\det(A) = 0$ so folgt die Behauptung sofort aus 1. Anderenfalls erhalten wir durch Anwenden von det auf beiden Seiten von $(*)$

$$\det(A^{\#})\det(A) = \det(A)^n.$$

und dies ist wegen $\det(A) \neq 0$ gleichbedeutend mit $\det(A^{\#}) = \det(A)^{n-1}$.

Zu Aufgabe 59 (4 P)
1. $\Rightarrow$ 2. [2P]
Per Annahme ist $\operatorname{rg} A = m$. Damit ist auch $\operatorname{rg} A^t = m$, und daher

$$\dim \operatorname{im} \mathcal{L}(A^t) = m.$$

Nach dem Basisauswahlsatz kann man also aus den Spalten von A^t eine Basis von $\operatorname{im} \mathcal{L}(A^t)$ auswählen. Diese ist gegeben durch m Zeilen $z_{i_1}, ..., z_{i_m}$ von A, und daher haben wir

$$\det \begin{pmatrix} — & z_{i_1} & — \\ & \vdots & \\ — & z_{i_m} & — \end{pmatrix} \neq 0.$$

2. $\Rightarrow$ 1. [2P]
Sei $\sum_{r=1}^{m} \lambda_r a_r = (0, ..., 0)^t$ mit $\lambda_r \in K$, wobei der Nullvektor auf der rechten Seite genau n Einträge hat. Bezeichnen wir mit $z_{i_j,k}$ den k-ten Eintrag des Zeilenvektors z_{i_j} so gilt insbesondere

$$\sum_{r=1}^{m} \lambda_r z_{i_j,r} = 0$$

für $j = 1, ..., m$. Da die Zeilen z_{i_j} aber per Voraussetzung linear unabhänig sind muss also $\lambda_r = 0$ für alle r gelten, und damit ist die Familie $(a_1, ..., a_m)$ linear unabhängig.

Alternativ: Aus der Voraussetzung folgt, dass die m Zeilen $z_{i_1}, ..., z_{i_m}$ linear unabhängig sind, also gilt $SR(A) = ZR(A) \geq m$. Da aber A genau m Spalten hat gilt auch $SR(A) \leq m$. Also ist $SR(A) = m$, und damit die Familie $(a_1, ..., a_m)$ linear unabhängig.

Zu Aufgabe 60 (2 P)
Per Induktion nach n. Ist $n = 2$ so gilt $V(\alpha_1, \alpha_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1$.
Also gilt die Behauptung für $n = 2$.
Angenommen die Behauptung gilt für $n = k$, $k \geq 2$. Wir zeigen, dass sie dann auch für $n + 1$ gilt.

Betrachten wir also die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Subtrahieren wir von der $(n+1)$-ten Zeile das α_1-fache der n-ten Zeile, so erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \alpha_2^n - \alpha_2^{n-1}\alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1}^n - \alpha_{n+1}^{n-1}\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Nun subtrahieren wir von der n-ten Zeile das α_1-fache der $(n-1)$-ten Zeile und fahren wir in diesem Muster fort bis wir von der 2-ten Zeile das α_1-fache der 1-ten Zeile. Wir erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1} - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1}^2 - \alpha_{n+1}\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \alpha_2^n - \alpha_2^{n-1}\alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1}^n - \alpha_{n+1}^{n-1}\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Entwickeln wir diese Matrix nach der ersten Spalte so erhalten wir

$$V(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1} - \alpha_1 & \\ \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1}^2 - \alpha_{n+1}\alpha_1 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_2^n - \alpha_2^{n-1}\alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1}^n - \alpha_{n+1}^{n-1}\alpha_1 & \end{pmatrix}$$

Wegen der Linearität der Determinante in jeder Spalte erhalten wir daraus unter Verwendung der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) &= \prod_{i=2}^{n+1} (\alpha_i - \alpha_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \\ \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} & \\ \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n+1}^2 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} & \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=2}^{n+1} (\alpha_i - \alpha_1) V(\alpha_2, ..., \alpha_{n+1}) \\ &= \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i). \end{aligned}$$