Lösungshinweise zu Blatt # 9
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (3 P)

1. [1P] $L_0 = \{0\}$ ist äquivalent zur Implikation $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, also $w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n = 0 \Rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n = 0$.

2. [1P] Seien $q_U : W \to U$, $q_V : W \to V$, sodass $\mathrm{id}_W = q_U + q_V$ gilt. Für jedes $w \in W$ gibt es eindeutige $u \in U, v \in V$ mit $w = u + v$. Es folgt $u + v = q_U(w) + q_V(w) \Rightarrow u - q_U(w) = q_V(w) - v \in U \cap V = \{0\}$. Also gilt $q_V(w) = v$ und $q_U(w) = u$.

3. [1P] Sei $\lambda e^x + \mu e^{-x} = 0$. Die Identität muss für jedes $x \in \mathbb{R}$ richtig sein. Für $x = 0$ und $x = 1$ erhalten wir die Gleichungen $\lambda + \mu = 0$ und $\lambda e + \mu 1/e = 0$. Diese sind nur für $\lambda = \mu = 0$ erfüllt.

Zu Aufgabe 39 (4 P)

1. [2P] Durch die Forderung

$$f(v) = (\overline{f} \circ \pi)(v) = \overline{f}([v]) \qquad \forall v \in V$$

ist $\overline{f}[(v])$ eindeutig bestimmt für alle $[v] \in V/U$. $\overline{f}$ ist wohldefiniert, d.h. repräsentantenunabhängig, wegen

$$[u] = [v] \Leftrightarrow u - v \in U \subset \ker f \Rightarrow f(u-v) = 0 \Leftrightarrow f(u) - f(v) = 0 \Leftrightarrow \overline{f}([u]) = \overline{f}([v]).$$

2. [2P]

(L1) $\overline{f}([u] + [v]) = \overline{f}([u + v]) = f(u + v) = f(u) + f(v) = \overline{f}([u]) + \overline{f}([v])$

(L2) $\overline{f}(k[v]) = \overline{f}([kv]) = f(kv) = kf(v) = k\overline{f}([v])$.

Zu Aufgabe 40 (3 P)
Es ist zu zeigen, dass $W = f(U_1) + f(U_2)$ und $f(U_1) \cap f(U_2) = \{0\}$ gilt. Nach Voraussetzung existieren für jedes $v \in V$ eindeutige $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$. Aus der Surjektivität von f folgt

$$\begin{aligned} w \in W &\implies \exists v \in V : w = f(v) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \\ &\implies W \subset f(U_1) + f(U_2). \end{aligned}$$

Da trivialerweise $f(U_1) + f(U_2) \subset W$ gilt, folgt $W = f(U_1) + f(U_2)$. Weiterhin folgt aus der Injektivität von f

$$\begin{aligned} w \in f(U_1) \cap f(U_2) &\implies \exists u_1 \in U_1, \exists u_2 \in U_2 : w = f(u_1) \wedge w = f(u_2) \\ &\implies f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2) = w - w = 0 \\ &\implies u_1 = u_2 = 0 \quad (\text{da } U_1 \cap U_2 = \{0\}) \\ &\implies w = f(u_1) = f(0) = 0 \\ &\implies f(U_1) \cap f(U_2) = \{0\}. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 41 (5 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. [2P] Wir zeigen $\operatorname{im} f \subset b^{-1}(\operatorname{im} f')$: Sei $y \in \operatorname{im} f$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Weil s surjektiv ist, gibt es ein $x' \in X'$ mit $s(x') = x$. Da b bijektiv ist, ist b^{-1} auf ganz Y wohldefiniert. Damit folgt

   $$(b^{-1} \circ f')(x') = (f \circ s)(x') = y \implies y \in b^{-1}(\operatorname{im} f').$$

   Die Implikation $\operatorname{im} f \supset b^{-1}(\operatorname{im} f')$ ist nun wegen $b^{-1} \circ f' = f \circ s$ klar.

2. [3P] $\ker f \supset b(\ker f')$: Sei $x' \in \ker f'$, d.h. $(i \circ f \circ b)(x') = 0$. Da i ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist folgt aus Satz 1.4.13 $\ker i = \{0\}$ und daher $f(b(x')) = 0$. Also ist $b(x') \in \ker f$.

   $\ker f \subset b(\ker f')$: Sei $x \in \ker f$. Da b bijektiv ist, existiert genau ein $x' \in X'$, sodass $b(x') = x$ gilt. Weil i ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt $f'(x') = 0$, d.h. $x \in b(\ker f')$.

Zu Aufgabe 42 (4 P)
Man bestimmt zunächst A mit $\mathcal{L}(A) = f$. Danach wendet man den Gauß-Algorithmus an und erhält

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \tilde{A}_1 P_1 = A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $u_1' = e_4 - (-2)e_1$ ist daher

$$u_1 = P_1 u_1' = P_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L_0 und somit auch eine Basis von $\ker f$.

Der Gauß-Algorithmus für Spalten liefert

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies P_2\tilde{A}_2 = A_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basen des Bildes von f sind daher gegeben durch die Vektoren ($P_2 = P_2^{-1}$)

$$b_1 = P_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = P_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = P_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 43 (5 P)

1. [2P] Die Implikation $\mathrm{Span}_K(U \cup V) \supset \{w \in W \mid \exists u \in U, v \in V : w = u + v\}$ ist sicher richtig. Sei nun $w \in \mathrm{Span}_K(U \cup V)$. Dann lässt sich w darstellen als $\sum_{i=1}^{n} k_i w_i$ mit $w_i \in U \cup V$, d.h. $w_i \in U \vee w_i \in V$. Es gibt also ein $1 \leq r \leq n$ und Familien $(k_{i_l})_{i_l}, (k_{i_m})_{i_m} \subset (k_i)_i$ und $(w_{i_l})_{i_l}, (w_{i_m})_{i_m} \subset (w_i)_i$, sodass $w = u + v$ mit $u := \sum_{l=1}^{r} k_{i_l} w_{i_l} \in U$ und $v := \sum_{m=1}^{n-r} k_{i_m} w_{i_m} \in V$. (Warum ist diese Darstellung in zwei Summen im Allgemeinen nicht eindeutig?) Also gilt auch „$\subset$“.

2. [3P] Sei $U \oplus V$ die externe direkte Summe von U, V. Wir definieren

$$f : U \oplus V \to U + V, \quad (u, v) \mapsto u + v.$$

f ist sicher surjektiv. Außerdem gilt

$$(u, v) \in \ker f \iff u = -v,\ u \in U, v \in V \overset{U,V\ \text{UVR}}{\iff} u, v \in U \cap V \wedge u = -v.$$

Somit ist $\ker f = \{(x, -x) : x \in U \cap V\}$. Man überzeugt sich leicht, dass damit $\ker f \cong U \cap V$ gilt. Mit der Dimensionsformel (Satz 2.6.9) und Satz 2.6.6 (Warum gilt dieser Satz auch für die externe direkte Summe?) folgt

$$\begin{aligned} \dim U + \dim V &= \dim(U \oplus V) \\ &= \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f \\ &= \dim(U + V) + \dim(U \cap V). \end{aligned}$$