Lösungshinweise zu Blatt # 6
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (5 P)

1. (1 P) Nur für $b = 0$ und m beliebig, weil $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sonst nicht für alle $x, y \in \mathbb{R}$ funktioniert.

2. (1 P) Für ein lineares f mit

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \text{ und } f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

würde folgen

$$f\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = 2f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

3. (1 P) Nein, da zum Beispiel $(1,0,0,0) + (0,1,1,0)$ nicht in der Menge enthalten ist.

4. (1 P) Nein, da $(1,0)$ und $(0,1)$ in der Menge sind, aber $(1,1)$ nicht.

5. (1 P) Ja. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und u, v aus der Menge gilt

$$\sum_{i=1}^{10} [i] \cdot (\lambda u + \mu v) = \lambda \sum_{i=1}^{10} [i] u + \mu \sum_{i=1}^{10} [i] v = 0 + 0,$$

woraus die UVR-Eigenschaft mit Hilfe von Aufgabe 26.2 folgt.

(Dies ist übrigens der Coderaum für ISBN - die Nummern, die auf jedem Buch zu finden sind. Mehr dazu in fast jeder Vorlesung über Codierungstheorie und anwendungsnahen Büchern über Lineare Algebra[1].)

Zu Aufgabe 23 (4 P) Betrachte die erweiterte Koeffizientenmatrix und verwende elementare Zeilenumformungen, um die Matrix in Zeilenstufenform zu überführen:

[1] z.B. Huppert, B., Willems, W., *Lineare Algebra*, Teubner Verlag, 2006

1. (2 P) Fall $K = \mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -\frac{19}{2} \\ 0 & -4 & -8 & -\frac{31}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-31+4\cdot 19}{2} \end{pmatrix}$$

In Schritt 1 wurde $\frac{3}{2}$-mal die erste Zeile von der zweiten Zeile abgezogen und $\frac{5}{2}$-mal die erste Zeile von der dritten abgezogen. Im zweiten Schritt wurde das (-4)-fache der zweiten Zeile zur Dritten addiert. Wegen $\frac{45}{2} \neq 0$ ist das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

2. (2 P) Fall $K = \mathbb{F}_5$: Die erweiterte Koeffizientenmatrix lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei hier im ersten Schritt die erste Zeile zur Zweiten addiert wurde und im zweiten Schritt die zweite Zeile zu der dritten Zeile hinzu addiert wurde.

Die Lösungsmenge ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zu Aufgabe 24 (2 P)

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $g, f \in V$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \phi_r(\lambda f + \mu g)(n) &= \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} (\lambda f + \mu g)(n+i) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \lambda f(n+i) + \mu g(n+i) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \lambda f(n+i) + \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \mu g(n+i) \\ &= \lambda \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f(n+i) + \mu \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} g(n+i) \\ &= \lambda \phi_r(f)(n) + \mu \phi_r(g)(n) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 25 (6 P)

1. (2 P) Nach Bemerkung 3 aus Abschnitt 1.5 gilt Distributivität in der Matrixmultiplikation, also gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A)(\lambda u + \mu v) &= A(\lambda u + \mu v) \\ &= A\lambda u + A\mu v = \lambda A u + \mu A v \\ &= \lambda \mathcal{L}(A)(u) + \mu \mathcal{L}(A)(v).\end{aligned}$$

2. (1 P) Injektiv: Multipliziert man eine Matrix mit e_i, dann erhält man die i-te Spalte. Gilt $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$, dann folgt aus

$$\mathcal{L}(A)(e_i) = \mathcal{L}(B)(e_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

dass alle Spalten der beiden Matrizen und damit die gesamten Matrizen A und B gleich sind.

(1 P) Surjektiv: Sei $f \in Hom_K(K^n, K^m)$ gegeben. Definiere $A \in Mat(m \times n, K)$ durch

$$A_{ji} = (f(e_i))_j.$$

Behauptung: Dann gilt $\mathcal{L}(A) = f$.

Beweis: Für ein beliebiges $v = (v_1, \ldots, v_n)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A)(v) &= A(v_1.e_1 + \ldots + v_n.e_n) \\ &= v_1.A(e_1) + \ldots + v_n.A(e_n) \\ &= v_1.f(e_1) + \ldots + v_n.f(e_n) \\ &= f(v_1.e_1) + \ldots + v_n.e_n) = f(v).\end{aligned}$$

(2 P) Behauptung: $\mathcal{L}$ ist K-linear.

Beweis: Für alle $v \in K^n$ gilt

$$\mathcal{L}(A+B)(v) = (A+B)(v) = Av + Bv = \mathcal{L}(A)(v) + \mathcal{L}(B)(v),$$

also gilt $\mathcal{L}(A+B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$. Weiterhin gilt für alle $r \in K$ und $v \in K^n$,

$$\mathcal{L}(rA)(v) = r.A(v) = r.\mathcal{L}(A)(v)$$

und damit $\mathcal{L}(rA) = r.\mathcal{L}(A)$.

Zu Aufgabe 26 (5 P)

1. (2 P) Es gilt

$$0.v = (0+0).v = 0.v + 0.v,$$

also, indem man auf beiden Seiten $-(0.v)$ addiert, $0 = 0.v$. Außerdem gilt

$$v + (-1).v = 1.v + (-1).v = (1 + (-1)).v = 0.v = 0.$$

2. (1 P) Sei zunächst U ein Untervektorraum. Dann für alle $u, v \in U$, dass $u + v$ ein Element von U ist, weil $(U, +)$ eine Untergruppe von $(V, +)$ ist. Die Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation steht wörtlich so in der Definition von Untervektorraum.

   (2 P) Sei nun umgekehrt angenommen, dass U die beiden Eigenschaften aus Teil (b) der Aufgabenstellung erfüllt. Dann bleibt nur zu zeigen, dass $(U, +)$ eine Untergruppe von $(V, +)$ ist. Die Abgeschlossenheit bezüglich Addition gilt nach Voraussetzung. Da $U \neq \emptyset$ existiert ein $u \in U$. Nach Teil 1) dieser Aufgabe ist dann auch $0.u = 0$ in U. Ebenfalls nach Teil 1) ist für jedes u in U auch $(-1).u = -u$ in U, womit $(U, +)$ eine Gruppe von $(V, +)$ ist.

Zu Aufgabe 27 (2 P)

Zum Beispiel ist die komplexe Konjugation

$$\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, a + ib \mapsto a - ib,$$

ein Gruppenhomomorphismus der nicht $\mathbb{C}$-linear ($\overline{i.1} = -i.1 \neq i.1$) ist.