Lösungshinweise zu Blatt # 4
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (5 P)

1. [1P] Zum Beispiel
$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. [1P] Wahr, da die Verknüpfung auf der Untergruppe die gleiche wie auf der Gruppe ist, also auch $ab = ba$ erfüllt.

3. [1P] Falsch. Betrachte $A = \{e\}$ und B nicht abelsch. Dann gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $f : A \to B$ gegeben durch $f(e) = e$.

4. [1P] Falsch, denn es gilt $f(g(1)) = 3$ und $g(f(1)) = 2$.

5. [1P] Wegen $(\sqrt{2})^{-1} \notin \mathbb{Q}$, gilt $1 \notin \sqrt{2}\mathbb{Q}^*$.

Zu Aufgabe 14 (5 P)

1. [2P] Sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ beide invertierbar, so ist die zu AB inverse Matrix gegeben durch $B^{-1}A^{-1}$, denn es gilt[1]
$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1}))A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} &= (AI)A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= I.\end{aligned}$$
Ebenso zeigt man $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

2. [3P] Im vorherigen Aufgabenteil wurde gezeigt, dass wir eine wohldefinierte Verknüpfung
$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto AB\end{aligned}$$
gegeben durch Matrizenmultiplikation haben. Nach Aufgabe 12.1 ist diese assoziativ, und die Einheitsmatrix I ist nach Aufgabe 12.3 das neutrale Element dieser Verknüpfung.[2]

   Zuletzt, ist A invertierbar, so gibt es $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $AB = BA = I$. Damit ist aber auch A das inverse Element zu B, d.h. $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, also $A^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

[1] Ausführlich aufgeschrieben, aus pädagogischen Gründen. Es sollte aber keine Punktabzüge nach sich ziehen, wenn solche Umformungsschritte in den Abgaben fehlen.

[2] Streng genommen müsste man noch zusätzlich $AI = A$ zeigen, was in Aufgabe 12.3 nicht getan wurde.

Zu Aufgabe 15 (4 P)

1. [2P] Seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

   und daher

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg \\ &= aedh + bgcf - afdg - bhce \\ &= (ad - bc)(eh - fg) \\ &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

2. [2P] Sei $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, dann gibt es $B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ mit $AB = I$. Daher gilt unter Verwendung von Teil (a)

$$1 = \det(I) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

   und daher $\det(A) \in \mathbb{R}^*$.

Zu Aufgabe 16 (6 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(A) \neq 0$.
[4P] Gemäß dem Hinweis betrachten wir zuerst das lineare Gleichungssystem $A \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist gegeben durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{array} \right). \tag{$\clubsuit$}$$

1. *Fall:* $a \neq 0$.

   Addieren wir zur zweiten Zeile von ($\clubsuit$) das $-\frac{c}{a}$-fache der ersten Zeile, so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} \end{array} \right).$$

   Wegen $ad - bc \neq 0$ erhalten wir daraus $g = -\frac{c}{ad-bc}$, und $e = \frac{d}{ad-bc}$.

2. *Fall:* $a = 0$.

   Wegen $ad - bc = \det(A) \neq 0$ gilt in diesem Fall $c \neq 0$. Daher vertauschen wir in (♣) zuerst die Zeilen und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|c} c & d & 0 \\ a & b & 1 \end{array}\right). \tag{$\diamondsuit$}$$

   Nun addieren wir zur zweiten Zeile von ($\diamondsuit$) das $-\frac{a}{c}$-fache der ersten Zeile, und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|c} c & d & 0 \\ 0 & -\frac{ad-bc}{c} & 1 \end{array}\right).$$

   Also gilt auch in diesem Fall $g = -\frac{c}{ad-bc}$ und $e = \frac{d}{ad-bc}$.

Wir betrachten nun das lineare Gleichungssytem $A \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und gehen ganz analog vor. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist in diesem Fall

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 1 \end{array}\right). \tag{$\heartsuit$}$$

1. *Fall:* $a \neq 0$.

   Addieren wir zur zweiten Zeile von ($\heartsuit$) das $-\frac{c}{a}$-fache der ersten Zeile, so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & 1 \end{array}\right).$$

   Da $ad - bc \neq 0$ gilt erhalten wir daraus $h = \frac{a}{ad-bc}$, und $f = -\frac{b}{ad-bc}$.

2. *Fall:* $a = 0$.

   Wegen $ad - bc = \det(A) \neq 0$ gilt in diesem Fall $c \neq 0$. Daher vertauschen wir in ($\heartsuit$) zuerst die Zeilen und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|c} c & d & 0 \\ a & b & 1 \end{array}\right). \tag{$\spadesuit$}$$

   Nun addieren wir zur zweiten Zeile von ($\spadesuit$) das $-\frac{a}{c}$-fache der ersten Zeile, und erhalten

$$\left(\begin{array}{cc|c} c & d & 1 \\ 0 & -\frac{ad-bc}{c} & -\frac{a}{c} \end{array}\right).$$

   Also gilt auch in diesem Fall $h = \frac{d}{ad-bc}$ und $f = -\frac{b}{ad-bc}$.

Setzen wir nun

$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

so folgt aus dem eben gezeigten sofort $AB = I$.

[1P] Es bleibt zu zeigen, dass auch $BA = I$ gilt. Dies rechnen wir einfach nach:

$$\begin{aligned}
BA &= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

[1P] Damit ist nun gezeigt, dass A invertierbar ist, falls $\det(A) \neq 0$, und dass die Inverse gegeben ist durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 17 (4 P)

1. [1P] Ist $0 = a + b\sqrt{2}$, so ist entweder $a = b = 0$, oder aber

   $$\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

   im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$. Daher gilt $0 \notin M$.

2. [1P] Seien $x, y \in M$ mit $x = c + d\sqrt{2}$ und $y = e + f\sqrt{2}$. Dann gilt

   $$xy = (c + d\sqrt{2})(e + f\sqrt{2}) = (ce + 2df) + (cf + de)\sqrt{2} \in M.$$

   denn wegen $x, y \neq 0$ ist auch $xy \neq 0$, und daher ist $ce + 2df$ oder $cf + de$ von Null verschieden.

3. [2P] Sei $x = c + d\sqrt{2}$. Da $x \neq 0$ existiert x^{-1} zumindest in $\mathbb{R}^*$. Wir haben

   $$x^{-1} = \frac{1}{c + d\sqrt{2}} = \frac{c - d\sqrt{2}}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{c - d\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = e + f\sqrt{2}$$

   mit $e = \frac{c}{c^2-2d^2}$ und $f = -\frac{d}{c^2-2d^2}$.[3] Da offensichtlich e oder f von Null verschieden ist (je nachdem ob $c \neq 0$ oder $d \neq 0$) folgt also $x^{-1} \in M$.

[3]Beachten Sie, dass der Nenner $c^2 - 2d^2$ als Produkt zweier von Null verschiedener Zahlen wieder von Null verschieden ist.