Frage:

Sei $A \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$ und $b \in K^m$. Was sind alle Lösungen von $Ax = b$?

Verfahren:

Setze $L_b := \{x \in K^n | Ax = b\}$; insbesondere $L_0 = \{x \in K^n | Ax = 0\}$.

Schritt 1: Wende das Gauß-Verfahren nach Satz 2.5.2 an, um die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) auf die Form

$$(A', b') = \left(\begin{array}{c:c|c} I_{r\times r} & * & \\ \hdashline 0 & 0 & b' \end{array} \right)$$

zu bringen. Hier ist

$$A' = U_1 \cdots U_l A P \quad , \quad b' = U_1 \cdots U_l b \ ,$$

wobei $U_1, \ldots, U_l$ $m\times m$-Matrizen vom Typ (P), (S), (D) sind, und P eine $n\times n$-Permutationsmatrix ist.

Gilt $b' = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, 0, \ldots, 0)$?

- Nein: In diesem Fall gilt $L_b = \emptyset$, und wir sind fertig.
- Ja: Wähle ein $x'_0 \in K^n$ mit $A'x'_0 = b'$, z.B.

  $$(x'_0)_i = \begin{cases} b'_i & ;\ 1 \le i \le r \\ 0 & ;\ r < i \le n \end{cases}$$

  Fahre mit Schritt 2 fort.

Schritt 2: Bestimme eine Basis $u'_1, \ldots, u'_{n-r}$ von $\{y \in K^n | A'y = 0\}$ wie in Satz 2.5.3. Setze

$$x_0 := Px'_0 \quad , \qquad u_i := Pu'_i \quad (i = 1, \ldots, n-r) \ .$$

Dann ist $(u_1, \ldots, u_{n-r})$ eine Basis von L_0. Für jede Wahl von $f_1, \ldots, f_{n-r} \in K$ gilt, dass

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n-r} f_i u_i \quad \in \ L_b \ ,$$

und jedes $x \in L_b$ lässt sich eindeutig in der obigen Form schreiben.

Frage:

Sei $f : K^n \to K^m$ eine K-lineare Abbildung. Was ist eine Basis von $\mathrm{im} f$?

Verfahren:

Wähle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ mit $\mathcal{L}(A) = f$ (existiert und ist eindeutig nach Satz 2.2.3). Wende das Gauß-Verfahren für Spalten nach Satz 2.5.2' an, um A auf die Form

$$A' = \left(\begin{array}{c:c} I_{r \times r} & 0 \\ \hdashline * & 0 \end{array} \right)$$

zu bringen. Hier ist

$$A' = PAU_1 \cdots U_l \ ,$$

wobei $U_1, \ldots, U_l$ $n \times n$-Matrizen vom Typ (P), (S), (D) sind, und P eine $m \times m$-Permutationsmatrix ist. Bezeichne die ersten r Spaltenvektoren von A' mit $b'_1, \ldots, b'_r$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc:c} | & & | & \\ b'_1 & \cdots & b'_r & 0 \\ | & & | & \end{array} \right)$$

Setze

$$b_i := P^{-1} b'_i \quad , \quad (i = 1, \ldots, r) \ .$$

Dann ist $(b_1, \ldots, b_r)$ eine Basis von $\mathrm{im}\, \mathcal{L}(A) = \mathrm{im} f$.