Weihnachtszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Aufgabe W1 (2 P)
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Entscheiden Sie, ob die Komposition $g \circ f$ injektiv oder surjektiv ist, falls

1. f surjektiv und g injektiv ist, oder
2. f und g surjektiv sind.

Geben Sie einen Beweis (oder ein Gegenbeispiel) für ihre Behauptung.

Aufgabe W2 (4 P)
Sei $t \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0\ , \\ x & + & 2y & & & = & -1\ , \\ 2x & & & + & t^2 z & = & t\ . \end{array}$$

Wie hängt die Lösungsmenge von der Wahl von t ab?

Aufgabe W3 (4 P)
Sei G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $H \neq \emptyset$
2. $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

Aufgabe W4 (5 P)
Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit 1. Betrachten Sie die Menge

$$R^* = \{r \in R \mid \text{es gibt } s \in R \text{ mit } rs = 1 = sr\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $(R^*, \cdot)$ eine Gruppe ist. Sie heißt „Einheitengruppe “von R.
2. Sei K ein Körper. Was ist dann K^*?
3. Was ist $\mathbb{Z}^*$? Was ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$?

Aufgabe W5 (3 P)
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \hat{+} :\ & \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, & (a,b) &\mapsto a \cdot b \\ \hat{\cdot} :\ & \mathbb{R} \quad\ \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, & (r,a) &\mapsto a^r \end{aligned}$$

einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

Aufgabe W6 (3 P)
Sei $U \subset K^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass es $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ gibt mit

$$U = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}.$$

Welches ist das kleinste solche m?

Aufgabe W7 (3 P)
Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -18 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Familie $(v_i)_{i=1,\dots,5}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Wählen Sie eine Teilmenge $J \subset \{1,2,3,4,5\}$, so dass $(v_i)_{i \in J}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.