Übungsblatt # 11
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (5 P)

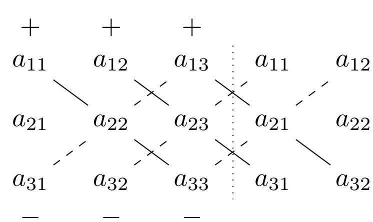
Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Im Beweis von Satz 3.1.3: Warum ist det normiert?
2. Sei K ein Körper. Ist die Funktion $M : K^n \to \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ aus (D1) in Kapitel 3.1 K-linear?
3. Bei der Bestimmung der Determinante einer $n \times n$ Matrix: Wie viele Summanden tauchen in der Formel von Leibniz auf und wie viele bei der rekursiven Formel mit Minoren (wenn man die rekursive Definition voll ausschreibt)?
4. Geben Sie $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ auf zwei verschiedene Weisen durch Transpositionen (mit verschieden vielen Transpositionen) an.
5. Was ist $\mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$?

Aufgabe 49 (2 P) Beweisen Sie aus Satz 3.1.3: Sei $r \in R, b \in R^n$. Dann gilt

$$d_n(M(rb)) = r d_n(M(b)).$$

Aufgabe 50 (2 P) Zeigen Sie, dass man die Determinante einer 3×3 Matrix bestimmen kann, indem man, wie in der folgenden Abbildung die Summe aus den Produkten der Einträge entlang der gestrichelten Linien von der Summe der Produkten entlang der durchgezogenen Linien abzieht:



Bitte wenden.

Aufgabe 51 (2 P) Aus Lemma 3.2.5: Sei $\sigma \in S_n$ eine beliebige Tranposition. Warum gibt es ein $\pi \in S_n$, so dass $\sigma = \pi \circ \tau_{12} \circ \pi^{-1}$ gilt?

Aufgabe 52 (6 P) Die *Charakteristik* eines Ringes R mit Eins ist die kleinste natürliche Zahl $k \geq 1$, so dass gilt

$$\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{k \text{ mal}} = 0.$$

Man schreibt auch $\mathrm{char}(R) = k$. Ist jede endliche Summe von Einsen ungleich 0, dann wird die Charakteristik des Ringes als 0 definiert.

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und V ein R-Modul. Sei $\varphi\colon V \times \ldots \times V \to R$ (n Faktoren V) n-multilinear, d.h. R-linear in jedem Argument:

$$\varphi(\ldots, rv + sw, \ldots) = r\varphi(\ldots, v, \ldots) + s\varphi(\ldots, w, \ldots)$$

für alle $r, s \in R$ und $v, w \in V$.

Betrachten Sie die Aussagen:

a) φ ist alternierend, d.h. für alle $v \in V$ gilt $\varphi(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0$.

b) φ erfüllt $\varphi(\ldots, v, \ldots, w, \ldots) = -\varphi(\ldots, w, \ldots, v, \ldots)$ für alle $v, w \in V$.

Zeigen Sie:

1. *a)* $\Longrightarrow$ *b)*.
2. Ist R ein Körper mit $\mathrm{char}(R) \neq 2$, so gilt auch *b)* $\Longrightarrow$ *a)*.
3. Geben Sie einen Körper R mit $\mathrm{char}(R) = 2$ an und für dieses R ein Gegenbeispiel zu *b)* $\Longrightarrow$ *a)*.

Aufgabe 53 (5 P) Zeigen Sie:

1. $\det A = \det A^t$.
2. Wir bezeichnen mit (D1s) und (D2s) die Eigenschaften (D1) und (D2) aus Kapitel 3.1 entsprechend umformuliert für Spalten. Zeigen Sie, dass die Funktion det (D1s) und (D2s) erfüllt.

Aufgabe 54 (2 P) Sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die n-multilinearen und alternierenden Abbildungen $V \times \cdots \times V \to K$ (n Faktoren V) einen ein-dimensionalen K-Vektorraum bilden.