Übungsblatt # 10
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (3 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Sei V ein unendlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(v_i)_{i\in I}$. Sei $\varphi \in V^*$, $\varphi(v_i) = 1$ für alle $i \in I$. Warum ist $\varphi \notin \mathrm{Span}(v_i^*)_{i\in I}$?
2. Sei $A \in \mathrm{Mat}(k \times l, K)$, $B \in \mathrm{Mat}(l \times m, K)$. Warum gilt $(AB)^t = B^t A^t$?
3. Sei $M \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Warum ist $\mathrm{SR}(M) = \dim \mathrm{im}\, \mathcal{L}(M)$?

Aufgabe 44 (4 P) Sei W ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subset W$ und $V \subset W$ Untervektorräume. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $U \oplus V = W$,
2. V schneidet jede Äquivalenzklasse $x \in W/U$ in genau einem Element.

Aufgabe 45 (2 P) Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & t \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 46 (3 P) Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Dann ist $\mathcal{C} = (b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_1)$ ebenfalls eine Basis (dies brauchen Sie nicht zu zeigen).
Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ und $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

Aufgabe 47 (2 P) Betrachten Sie Funktionen der Form

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ (also reelle Polynome von Grad ≤ 4). Sei V der Vektorraum der Funktionen dieser Form, und sei $D : V \to V$ die Funktion $f \mapsto \frac{d}{dx} f$. (Sie können ohne Beweis annehmen, dass D linear ist.) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$.

Bitte wenden.

Aufgabe 48 (10 P) Seien V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

1. Es sind äquivalent
   (a) f ist surjektiv.
   (b) Für alle K-Vektorräume T und linearen Abbildungen $h : W \to T$ gilt: $h \circ f = 0 \;\Rightarrow\; h = 0$.
2. Es sind äquivalent
   (a) f ist injektiv.
   (b) Für alle K-Vektorräume S und linearen Abbildungen $h : S \to V$ gilt: $f \circ h = 0 \;\Rightarrow\; h = 0$.
3. f ist surjektiv genau dann, wenn f^* injektiv ist.
4. f ist injektiv genau dann, wenn f^* surjektiv ist.