Seminar für LAGym/LAB: Analytische Geometrie

Ingo Runkel und Peter Stender

Euklidische Vektorräume und Geometrie

E1: Lineare Gleichungssysteme

- Affiner Unterraum eines Vektorraumes. Lineare Gleichungssysteme $Ax = b$, Lösungsmenge ist ein affiner Unterraum, Beziehung Rang einer Matrix, Dimension des Lösungsraumens [Fi1, 0.5.3, 2.3.5], [Fi2, 1.0.2].
- Jeder affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist Lösungsmenge eines geeigneten linearen Gleichungssystems (selber überlegen, siehe z.B. [Bosch, 3.5, Aufgabe 3])
- Parameterdarstellung von Geraden im $\mathbb{R}^n$, durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade [Fi1, 0.2.2]. Geraden sind das gleiche wie ein-dimensionale affine Unterräume.
- *Vorrechnen der Lösung zu zwei 3×3 Gleichungssysteme $A \cdot x = b, b \neq 0$ mit kleinen ganzen Zahlen mit dem Gauß-Verfahren, wobei rang$(A) \in \{2, 3\}$. Die Lösung wird geomtrisch gedeutet.*

E2: Geraden und Ebenen

- Alternative Beschreibung von Geraden in der Ebene. Zwei Geraden in der Ebene sind entweder parallel oder schneiden sich genau in einem Punkt [Fi1, 0.2.3] (Begründung auch durch Theorie linearer Gleichungssysteme aus Vortrag E1 – selber überlegen). *Für eine konkrete Gerade im $\mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Darstellungen angeben.*
- Parameterdarstellung von Ebenen im $\mathbb{R}^n$ [Fi1, 0.4.1]. Ebenen sind das gleiche wie zwei-dimensionale affine Unterräume.
- Alternative Beschreibung von Ebenen im $\mathbb{R}^3$; zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind entweder parallel oder schneiden sich in einer Geraden. [Fi1, 0.4.2] (wieder über Theorie von Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme).
- *Für zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ zwei verschiedene Darstellungen angeben und die Schnittgerade der Ebenen bestimmmen.*

E3: Euklidische Vektorräume

- Skalarprodukt in $\mathbb{R}$-Vektorräumen, Beispiel $\mathbb{R}^n$, ein unendlich-dimensionales Beispiel. Definition Euklidischer Vektorraum [K, 5.1, 5.2], [Fi1, 5.3.2]
- Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ axiomatisch einführen, Koordinatendarstellung herleiten, Eigenschaften (siehe Notizen P. Stender).
- Abstand Punkt-Gerade im $\mathbb{R}^n$. Windschiefe Geraden im $\mathbb{R}^3$, Abstand von Geraden im $\mathbb{R}^3$ [K, 5.4.1], [Fi1, 0.3.8]
- *An einem konkreten Beipspiel vorrechnen, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden, sowie der Abstand zweier windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^3$ bestimmt wird.*

E4: Sätze der Elementargeometrie in der Ebene

- Hessesche Normalform der Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$ und Abstand Punkt-Gerade. Hessesche Normalform der Ebenengleichung im $\mathbb{R}^3$ [K, 4.1], [Fi1, 0.3.5, 0.4.3].
- Notation $[a, b, c]$, Höhen in Dreiecken, Drei-Punkt-Kriterium, Höhenschnittpunkt-Satz [K, 4.1].
- Kreis, Umkreis eines Dreiecks, Satz über Mittelpunkt und Radius, Sinussatz, Euler-Gerade [K, 4.3]
- *Hessesche Normalform und Parameterform zu einer Ebene im* $\mathbb{R}^3$ *angeben und mit anderen Darstellungen der Ebenen vergleichen.*
- *Zu den elementargeometrischen Sätzen gehören Zeichnungen, die diese Sätze illustrieren. Diese sollten mit einer dynamischen Geomtriesoftware (Geogebra, Cinderella) erstellt werden.*

Affine Geometrie

A1: Affine Räume

- Erinnerung affiner Unterraum eines Vektorraumes, Wirkung der Translationen [Fi2, 1.0.2].
- Gruppen und Gruppenwirkung (= Gruppenoperation) [Fi2, 1.0.2–1.0.5]
- abstrakte Definition eines affinen Raumes, Dimension, Beispiel K^n. [Fi2, 1.0.2, 1.0.4, 1.0.5, 1.0.6].
- Notation $\overrightarrow{pq}$. Bemerkung zu Parallelogrammen [Fi2, 1.0.6, 1.0.7].
- *Grafische Illustration zu affinen Räumen (Punkte, Translationen,* $\overrightarrow{pq}$*), Parallelogramm. Wähle*
  - $K^n = \mathbb{R}^3$ *und* $\dim T(X) \in \{1, 2\}$.
  - $K^n = \mathbb{F}_5^2$ (*Erinnerung:* $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *mit der üblichen Addition und Multiplikation Modulo* 5).

  Diese sollten mit einer dynamischen Geomtriesoftware (Geogebra, Cinderella) oder einem Grafikprogramm erstellt werden.

A2: Affine Abbildungen

- Affine Abbildungen von Vektorräumen. Beschreibung durch Matrizen. Allgemeine Definition [Fi2, 1.1.0, 1.1.1].
- Affine Abbildungen erhalten Parallelogramme, Charakterisierungen von affinen Abbildungen, Verkettungen, Inverse, Translationen [Fi2, 1.1.1-1.1.3].
- *Zu den folgenden* linearen *Abbildungen im* $\mathbb{R}^2$ *die Matrizen angeben: Drehung um den Winkel* α*, Spiegelung an der Geraden, die mit der x-Achse den Winkel* α *einschließt, Streckung mit dem Faktor* λ*, Verzerrung in Richtung der Vektoren* $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ *mit den Faktoren* λ_1, λ_2.
- *Zu den vorherigen linearen Abbildung* affine *Abbildungen angeben, z.B. eine Drehung um den Punkt* (z_1, z_2).

A3: Affine Unterräume

- Affiner Unterraum, Dimension, Kriterium aus Übung 1 [Fi2, 1.1.4].
- Durchschnitt und Verbindungsraum von affinen Unterräumen, Übung zu Verbindungsräumen. Translationsvektorraum von Durchschnitt und Verbindung [Fi2, 1.1.6, 1.1.8]. Durchschnitt und Verbindungsraum sind verträglich mit affinen Abbildungen (selber überlegen).
- Charakterisierung von affinen Unterräumen durch Geraden [Fi2, 1.1.9].
- Dimensionsformel für affine Unterräume [Fi2, 1.1.10].
- *Illustration einer Geraden als affiner Unterraum einer Ebene im* $\mathbb{R}^3$ *mit Zahlenbeispiel und grafischer Darstellung.*
- *Illustration von [Fi2, 1.1.9] mit* $K^n = \mathbb{F}_5^2$.
- *Illustration des Verbindungsraumes zweier windschiefer Geraden im* $\mathbb{R}^3$ [Fi2, 1.1.10]).

A4: Affine Basen, das Teilverhältnis

- Affine unabhängige Punkte, Beispiel $\mathbb{A}_n(K)$, Bemerkungen zu Eigenschaften, Beschreibung von affinen Abbildungen durch Basen. Affine Koordinaten [Fi2, 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3].
- Verbindungsraum von Punkten und Affinkombinationen [Fi, 1.2.6].
- Definition des Teilverhältnisses. Das Teilverhältnis ist eine affine Invariante. Aussagen aus der elementaren Geometrie mittels affinen Teilverhältnissen [Fi2, 1.2.4, 1.2.5].
- *Grafische Illustration einer affinen Basis einer affinen Ebene im* $\mathbb{R}^3$.
- *Übungsaufgabe 1* [Fi S. 27]

A5: Euklidische affine Räume

- Definition Euklidischer affiner Raum, Isometrie. Isometrien sind affin [Fi, 1.5.1, 1.5.2]. Isometrien erhalten Abstände zwischen affinen Unterräumen (selber überlegen).
- Drehung und Dreh-Spiegelung [Fi2, 1.5.3].
- *Teile der Aufgabe „Oktaeder des Grauens“ (Internet) aus einer Abiturprüfung werden vorgerechnet, indem zunächst der gegebene Oktader mit Hilfe einer Isometrie so transformiert wird, dass der Schwerpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt und die Eckpunkte auf den Koordinatenachsen.*

Kegelschnitte und Quadriken

K1: Ellipsen

- Ellipsen als Transformation eines Kreises, als Gleichung, Scheitel- und Brennpunkte, Abstandseigenschaft der Brennpunkte, Fadenkonstruktion, Linealkonstruktion (ohne Krümmungskreise, Leitlinien) [Fi2, 1.4.0.A]
- Durch jeden Punkt der Ellipse geht genau eine Gerade, die die Ellipse nur in diesem Punkt schneidet (selber überlegen – quadratische Gleichung lösen). Diese heißt Tangente.
- Reflexionseigenschaft der Ellipse: Lichtstrahlen von einem Brennpunkt werden im anderen gebündelt. Geben Sie zwei Argumente: das analytische aus [Fi2, 1.4.0.A Übung 2] und das geometrische aus [HCV, § 1, die ersten beide Seiten]. (Bemerkung: Lichstrahlen erfüllen Einfallswinkel = Ausfallswinkel bezogen auf die Tangente im Reflexionspunkt.)

K2: Parabeln, Hyperbeln, Zylinder, Kegel

- Leitlinie bei Ellipse, Parabel als Grenzfall der Ellipse, Parabel als Gleichung. Zirkel und Lineal Konstruktion erklären [Fi2, 1.4.0.B].
- Reflexionseigenschaft der Parabel [Fi2, 1.4.0.B].
- Hyperbeln: Definition via Leitlinie und via Brennpunkte. Fadenkonstruktion erklären (etwas kryptisches Bild in [Fi2]). Reflexionseigenschaft erklären (ohne Beweis) [Fi2, 1.4.0.C].
- Gleichung für Zylinder parallel zur z-Achse (selber überlegen) und Kegel entlang der z-Achse (wie in [Fi2]), am Bild erklären. Drehmatrix um Winkel φ wiederholen (A5). Gleichung für um Winkel φ gedrehten Zylinder und Kegel (selber überlegen und [Fi2, 1.4.0.D]).
- *Die Wirkung der Exzentrizität auf das Aussehen von Ellipse, Parabel, Hyperbel durch eine parameterabhängige grafische Darstellung illustrieren. (z.B. Geogebra etc.)*

K3: Zylinder- und Kegelschnitte

- Der Schnitt eines Zylinders und einer Ebene ist eine Ellipse. Erklären auf zwei Weisen: Analytisch (selber überlegen – bestimmen der Schnittgleichung wie im Kegelschnitt-Beispiel in [Fi2], aber einfacher) und durch das geometrische Argument via einbeschriebener Kugeln [HCV, §, 2, erste Seite].
- Der Schnitt eines Kegels mit einer Ebene ist eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel. Erklären auf zwei Weisen: Analytisch [Fi2, 1.4.0.D] und durch das geometrische Argument via einbeschriebener Kugeln [Fi2, 1.4.0.D für Parabel], [HCV, §, 2, zweite Seite für Hyperbel].
- Allgemeine Definition einer Quadrik [Fi2, 1.4.1]. Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln, Zylinder, Kegel wie oben sind Quadriken (selber überlegen).
- *Die verschiedenen Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel) als Schnitt einer parameterabhängigen Ebene mit einem Kegel illustrieren. (z.B. Geogebra etc.)*

K4: Quadriken und Normalformen

- Quadriken durch symmetrische Matrizen beschreiben. Affinitäten bilden Quadriken auf Quadriken ab [Fi2, 1.4.1].
- Satz über die affinen Hauptachsentransformationen von reellen Quadriken angeben und Begriffe erklären. Beweisskizze soweit Zeit erlaubt [Fi2, 1.4.3].
- *Beispiele für die Fälle* (a), (b), (c) [Fi2, S. 59] *im* $\mathbb{R}^2$ *klären und grafisch illustrieren*

K5: Normalformen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

- Schnitt einer beliebigen Ebene im $\mathbb{R}^3$ in Parameterdarstellung mit dem Kegel $x^2 + y^2 = z^2$ ist eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$.
- Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^2$ diskutieren [Fi2, 1.4.8], [Fi1, 5.2.7 – Fall $\mathbb{R}^2$]. Insbesondere: erste Tabelle in [Fi2, 1.4.8] erklären und Matrizen für die einzelnen Fälle angeben, Bezug zu den aufgeführten Quadriken herstellen.
- *Übungsaufgabe* [Fi2, S. 59] *vorrechnen.*
- Zu einzelnen Beispiele im $\mathbb{R}^3$ aus Tabelle 2 [Fi2, S. 73] die Normalformen der Quadriken erläutern [Fi2, 1.4.8] *und durch eigene Bilder (z.B. Geobebra) illustrieren.* Dabei vorzugsweise die in [Fi2, 3.5.10, 199 f.] abbgebildeten Fälle klären.

Quellen

[HCV] Hilbert, Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie (Springer)

[Fi1] Fischer, Lehrbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium (Vieweg).

[Fi2] Fischer, Analytische Geometrie (Vieweg).

[K] Koecher, Lineare Algebra und analytische Geometrie (Springer)