Pfingstzettel (Bonus) Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (5 P)
Sei G eine Gruppe, und sei N eine normale Untergruppe von G. Sei $\pi : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ die natürliche Projektion. Wir definieren

$$\phi : \{\text{Untergruppen von } G/N\} \to \{\text{Untergruppen von } G, \text{ die } N \text{ enthalten}\}$$
$$H \mapsto \pi^{-1}(H)$$

1. Zeigen Sie, dass ϕ wohldefiniert und bijektiv ist.
2. Zeigen Sie, dass $H \subseteq G/N$ genau dann normal ist, wenn $\phi(H) \subseteq G$ normal ist.

Aufgabe 2 (5 P)
Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| = n$. G wirke auf der Menge $X = G$ durch Multiplikation von Links. Diese Wirkung definiert einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to S_G \cong S_n$.

1. Sei $g \in G$ ein Element von Ordnung m. Was ist der Zykeltyp von $\phi(g)$? Was ist $sgn(\phi(g))$?
2. Nehmen Sie jetzt an, dass $n = 2l$, wobei l ungerade ist. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von Index 2 enthält.
   Hinweis: Nach dem Satz von Cauchy enthält G ein Element g von Ordnung 2. Was können Sie über $sgn(\phi(g))$ sagen? Muss die Verkettung $G \to S_G \overset{sgn}{\to} \{\pm 1\}$ surjektiv sein?

Aufgabe 3 (5 P)

1. Berechnen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe eines n-dimensionalen Würfels.
2. Zeigen Sie, dass diese Gruppe für $n \geq 5$ nicht auflösbar ist.

Aufgabe 4 (4 P)
Sei G eine Gruppe und seien H, K zwei Untergruppen von G. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $H \cdot K = \{hk | h \in H, k \in K\}$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $H \cdot K = K \cdot H$ gilt.

Bitte wenden.

Aufgabe 5 (5 P)

Sei G eine Gruppe von Ordnung 60. Nehmen Sie an, dass G eine *normale* 3-Sylow Untergruppe enthält. Zeigen Sie, dass G auch eine normale 5-Sylow Untergruppe enthält.