Übungsblatt # 12 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (4 P)

Sei K ein Körper. Sei $K(t)$ der Quotientkörper des Polynomrings $K[t]$.

1. Sei $h \in K(t)$ algebraisch über K. Zeigen Sie, dass $h \in K$ gilt.
2. Finden Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus $(K, +) \to Aut_K(K(t))$.

Aufgabe 2 (3 P)

Wir betrachten in $\mathbb{F}_3$ die Polynome $f_1 = X^2 + 1$ und $f_2 = X^2 + X + 2$ und die Ringe $K_i = \mathbb{F}_3[X]/(f_i)$.

1. Zeigen Sie: f_1 und f_2 sind irreduzibel. (Also sind K_1 und K_2 Körper).
2. Geben Sie einen Isomorphismus $\varphi : K_1 \to K_2$ an.

Aufgabe 3 (4 P)

Zeigen Sie, dass $cos(20°)$ nicht konstruierbar ist. Was bedeutet dies für die Dreiteilung beliebiger Winkel mit Zirkel und Lineal?

Hinweis: Sie dürfen die Identität $cos(3\alpha) = 4cos^3(\alpha) - 3cos(\alpha)$ benutzen.

Aufgabe 4 (4 P)

1. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ nicht normal ist.
2. Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ normal ist.

Aufgabe 5 (2 P)

Sei L/K eine algebraische nicht separabele Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $char(K) \neq 0$ gilt.

Bitte wenden.

Aufgabe 6 (4 P)

Sei K ein Körper von Charakteristik $p > 0$, und sei $L \supseteq K(t)$ der Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^p - t$. Sei a eine Nullstelle von f in L.

1. Zeigen Sie, dass a die einzige Nullstelle von f in L ist.
2. Berechnen Sie $[L : K(t)]$. Ist a separabel über $K(t)$?

Aufgabe 7 (3 P – hätte aber mehr verdient)

Die Umkehrung von 3.4, Kor. 5 gilt nicht: Sei $f = X^4 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei z eine Nullstelle von f in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 4$, aber $z \notin \mathsf{A}\{0,1\}$.

Hinweis: Seien $\{z, \bar{z}, w, \bar{w}\}$ die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ (warum sieht so die Menge von Nullstellen von f aus?). Warum folgt aus $z \in \mathsf{A}\{0,1\}$, dass auch $\bar{z}, w, \bar{w} \in \mathsf{A}\{0,1\}$? Überlegen Sie sich, dass $z\bar{z} + w\bar{w}$ eine Nullstelle von $X^3 - 4X - 1$ ist.