

# Übungsblatt # 11 Algebra 1 SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

---

## Aufgabe 1 (4 P)

Betrachten Sie  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ .

1. Gibt es einen  $\mathbb{Q}$ -Isomorphismus von  $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$  nach  $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$  der  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  auf  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  abbildet? Und falls es tatsächlich einen solchen gibt, wohin wird dann  $3 + \sqrt{6}$  abgebildet?
2. Wieviele  $\mathbb{Q}$ -Homomorphismen gibt es
  - (a) von  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  nach  $\mathbb{R}$ ?
  - (b) von  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$  nach  $\mathbb{R}$ ?

## Aufgabe 2 (2 P)

Sei  $P$  der Primkörper eines Körpers  $K$ . Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus von  $K$  ein  $P$ -Automorphismus ist.

## Aufgabe 3 (4 P)

Sei  $f = X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$ .

1. Zerlegen Sie  $f$  über dem Körper  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$  in irreduzible Faktoren.
2. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper  $L$  von  $f$  über  $\mathbb{Q}$ . Welchen Grad hat die Körpererweiterung  $L/\mathbb{Q}$ ?

## Aufgabe 4 (3 P)

Zeigen Sie, dass  $\text{Aut}(\mathbb{R}) = \{id_{\mathbb{R}}\}$  gilt.

*Hinweis:* Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Automorphismus. Zeigen Sie  $a < b \implies \phi(a) < \phi(b)$ . Was ist der Primkörper von  $\mathbb{Q}$ ?

*Bemerkung:* Es gilt übrigens nicht, dass  $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{id, \text{Konjugation}\}$ . Es gibt also Automorphismen von  $\mathbb{C}$ , die auf  $\mathbb{R}$  nicht die Identität sind. (Um dies zu sehen, muss man gar nicht mal so viel mehr arbeiten, siehe <http://www.jstor.org/stable/2689301>)

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 5** (6 P) Sei  $p > 2$  eine Primzahl.

1. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von  $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$  über  $\mathbb{Q}$   $f_p(x) = x^{p-1} + \dots + x + 1$  ist.
2. Finden Sie alle  $\mathbb{Q}$ -Automorphismen von  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ . Zeigen Sie, dass die Gruppe  $Aut_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$  zu  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  isomorph ist.
3. Sei  $\sigma \in Aut_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$  ein Automorphismus von Ordnung 2. Zeigen Sie:  $\{x \in \mathbb{Q}(\zeta_p) \mid \sigma(x) = x\} = \mathbb{Q}(\zeta_p) \cap \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 6** (3 P)

Sei  $K = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1)$ .

1. Zeigen Sie, dass  $K$  ein Körper ist.
2. Finden Sie einen Erzeuger von  $K^\times$ .

**Aufgabe 7** (2 P)

Sei  $f \in \mathbb{R}[x]$  ein unzerlegbares Polynom. Zeigen Sie:  $grad(f) \in \{1, 2\}$ .