# Übungsblatt # 06 Algebra 1
# SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

---

**Aufgabe 1** (2 P)

Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe $A$ ein Quotient einer freien abelschen Gruppe ist.

**Aufgabe 2** (6 P)

Betrachten Sie die abelschen Gruppen

$$A = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(1,2)\mathbb{Z} \qquad , \qquad B = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(2,2)\mathbb{Z} \ .$$

Geben Sie $T(A)$ und $T(B)$ an. Geben Sie in beiden Fällen eine direkte Summenzerlegung in eine freie Untergruppe und die Torsionsuntergruppe an. Sind mehrere Zerlegungen möglich, geben Sie zwei Beispiele an.

**Aufgabe 3** (4 P)

Sei $p$ eine Primzahl.

1. Zeigen Sie (ohne den Klassifikationssatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen), dass die Gruppen $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.

2. Wie viele Isomorphieklassen von abelschen Gruppen von Ordnung $p^3$ gibt es? Von Ordnung $p^4$? (Hier können Sie den Klassifikationssatz benutzen.)

**Aufgabe 4** (2 P)

Sei $A$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Sei $X \subseteq A$ ein Erzeugendensystem von $A$. Zeigen Sie, dass $X$ ein endliches Erzeugendensystem von $A$ enthält.

**Aufgabe 5** (5 P)

1. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ zyklisch ist.

2. Sei $A \subseteq \mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte Untergruppe. Zeigen Sie, dass $A$ zyklisch ist.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt ist.

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 6** (5 P)

Sei $A$, $B$ und $C$ abelsche Gruppen.

1. Nehmen Sie an, dass $A$, $B$ und $C$ endlich erzeugte abelsche Gruppen sind. Zeigen Sie, dass aus $A \oplus B \cong C \oplus B$ folgt, dass $A \cong C$.

2. Beweis oder Gegenbeispiel: Was wird aus der Behauptung aus Teil 1, wenn $B$ nicht als endlich erzeugt vorausgesetzt wird?