Übungsblatt # 05 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (5 P)

1. Geben Sie alle 3-Sylow Untergruppen von S_4 an.
2. Seien G_1 und G_2 endlichen Gruppen, p eine Primzahl, und $\pi : G_1 \to G_2$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Sei $P \subseteq G_1$ eine p-Sylow-Untergruppe. Zeigen Sie, dass $\pi(P)$ eine p-Sylow Untergruppe von G_2 ist.

Aufgabe 2 (3 P)
Sei p eine Primzahl und sei G eine endliche p-Gruppe. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

Aufgabe 3 (5 P)
Sei K ein Körper, und sei

$$B_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $GL_n(K)$ mit Diagonale $(1, 1, \ldots 1)$.

1. Sei $\phi_n : B_n \to B_{n-1}$ die Abbildung

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   (wir löschen einfach die letzte Spalte und die letzte Reihe). Zeigen Sie, dass ϕ_n ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, und bestimmen Sie $Ker(\phi)$.

2. Beweisen Sie, dass die Gruppe B_n auflösbar ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (2 P)
Seien $p < q$ Primzahlen, und sei G eine Gruppe von Ordnung pq. Zeigen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 5 (6 P)
Sei G eine Gruppe. Wir definieren

$$[G, G] := \langle \{xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in G\} \rangle.$$

1. Zeigen Sie, dass $[G, G]$ eine normale Untergruppe von G ist, und dass die Quotientgruppe $G/[G, G]$ eine abelsche Gruppe ist.
2. Sei A eine abelsche Gruppe, und sei $\phi : G \to A$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $[G, G] \subseteq Ker(\phi)$.
3. Sei $G \neq \{e\}$ eine auflösbare Gruppe. Zeigen Sie, dass $G \neq [G, G]$ gilt. Ist die Bedingung $G \neq [G, G]$ hinreichend für die Auflösbarkeit von G?

Aufgabe 6 (3 P)
Sei G eine Gruppe von Ordnung 56. Beweisen Sie, dass G nicht einfach ist.