Übungsblatt # 03 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (5 P)

1. Warum kommutieren Permutationen mit disjunkten Trägern?
2. Sei $\pi \in S_8$ die Permutation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 8 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
Screiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln.
3. Sei S eine Teilmenge von G. Warum ist der Zentralisator $C_G(S) = \{g \in G | \forall\, s \in S\, gs = sg\}$ eine Untergruppe? Ist der Zentralisator immer normal?

Aufgabe 2 (4 P)

1. Sei G das innere semi-direkte Produkt von $N, H \leq G$, mit N normal. Zeigen Sie, dass G zu einem äußeren semi-direkten Produkt der Form $N \rtimes_\phi H$ isomorph ist. Was ist der Gruppenhomomorphismus ϕ? Ist ϕ eindeutig?
2. Sei $G = N \rtimes_\phi H$. Zeigen Sie, dass G das innere semi-direkte Produkt von $H' = \{(e, h) \,|\, h \in H\}$ und $N' = \{(n, e) \,|\, n \in N\}$ ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (5 P)

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei G die Menge aller Abbildungen $V \to V$ der Form $v \mapsto Av + b$ mit $A \in \mathrm{GL}(V)$ und $b \in V$:

$$G = \{f : V \to V \mid \exists A \in \mathrm{GL}(V), b \in V : \forall v \in V : f(v) = Av + b\} \ .$$

Zeigen Sie:

1. G ist eine Gruppe unter Verkettung von Funktionen.
2. Die Mengen $H = \{f \in G | b = 0\}$ und $N = \{f \in G | A = id\}$ sind Untergruppen von G, und N ist normal.
3. G ist das semidirekte Produkt von H und N.

Aufgabe 4 (5 P)

Hintergrund: Es sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Jedes $\pi \in S_n$ lässt sich als Produkt von disjunkten Zykeln schreiben, also $\pi = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r$. Es sei k_i die Länge von τ_i. Wir dürfen annehmen, dass $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r \geq 2$. Wir nennen $(k_1, \dots, k_r)$ den *Zykeltyp* von π.

1. Was ist die Ordnung des Zykels $(m_1 m_2 \dots m_k)$?
2. Sei $\pi \in S_n$ ein Element vom Zykeltyp $(k_1, k_2, \dots, k_r)$. Was ist die Ordnung von π?
3. Finden Sie ein Element $\pi \in S_5$ von maximaler Ordnung.

Aufgabe 5 (5 P)

Hintergrund: Für eine beliebige Gruppe G und $x, y \in G$ sagen wir, dass x und y *konjugiert* sind, falls ein $z \in G$ existiert, so dass $zxz^{-1} = y$ gilt.

Zeigen Sie, dass zwei Permutationen $\pi, \pi' \in S_n$ genau dann konjugiert sind, wenn sie denselben Zykeltyp haben.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für einen Zykel $(m_1 \dots m_j)$ der Länge j und eine beliebige Permutation $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\sigma(m_1 \dots m_j)\sigma^{-1} = (\sigma(m_1) \dots \sigma(m_j))$$