Übungsblatt # 02 Algebra 1
SS 2016

(Ehud Meir und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (4 P)

1. Sei S eine Teilmenge von G. Warum stimmen die beiden Definitionen der von S erzeugten Untergruppe überein? Also, warum gilt
$$\bigcap \big\{ H \leq G \,\big|\, S \subset H \big\} = \big\{ s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \,\big|\, n \geq 0, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, s_i \in S \big\} \ ?$$

2. Seien G_λ, $\lambda \in \Lambda$, Gruppen mit $G_\lambda \neq \{e\}$. Warum gilt für unendliche Λ nicht $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = \big\langle \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \iota_\lambda(G_\lambda) \big\rangle$?
(Notation wie in der Vorlesung, Kap. 1.3.)

Aufgabe 2 (4 P)
Sei G eine Gruppe.

1. Sei $g \in G$ beliebig. Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{Z} \to G$, $m \to g^m$ (das m-fache Produkt von g mit sich selbst, wobei für $m < 0$ $(g^{-1})^{|m|}$ gemeint ist) ein Gruppenhomomorphismus ist. Was ist der Kern von φ?
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition der Ordnung eines Elementes aus den Anwesenheitsaufgaben auf Blatt 1.

2. Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, wenn es ein Element $g \in G$ gibt, so dass $\forall x \in G : \exists n \in \mathbb{Z} : x = g^n$. Zeigen Sie: Eine Gruppe G ist genau dann zyklisch, wenn sie zu $\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Aufgabe 3 (6 P)
Sei G eine Gruppe mit 6 Elementen. Nehmen Sie an, dass $x \in G$ ein Element von Ordnung 2 und $y \in G$ ein Element von Ordnung 3 ist, und dass die Untergruppe $\langle y \rangle$ normal ist.

1. Zeigen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2. Nehmen Sie an, dass $xy = yx$ gilt. Zeigen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

3. Beweisen Sie, dass $S_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (6 P)
Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ zwei positive Zahlen.

1. Beschreiben Sie alle Homomorphisms $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   Hinweis: Benutzen Sie kgV(m,n).

2. Zeigen Sie, dass im Fall $n|m$ die Abbildung $\phi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x + m\mathbb{Z} \mapsto x + n\mathbb{Z}$ wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus ist.

3. Nehmen Sie an, dass $n|m$ gilt. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$1 \to Ker(\phi) \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 1$$

   dann und nur dann spaltet, wenn $ggT(\frac{m}{n}, n) = 1$.

Aufgabe 5 (4 P)
Sei G eine Gruppe. Wir definieren:

$$T(G) = \{\phi \in Aut(G) \mid \text{Für alle Untergruppen } H \leq G \text{ gilt } \phi(H) = H\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $T(G)$ eine normale Untergruppe von $Aut(G)$ ist.

2. Geben Sie ein Beispiel an, für das $T(G) \neq \{e\}$ gilt.