In der gesamten Klausur steht K für einen Körper.

Teil A

A1: Verständnisfragen [15 P]

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie eine kurze Begründung.

a) Existiert ein kommutativer Ring mit Eins R, ein $n \geq 1$ und eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, R)$ mit $A_{ij} \notin R^*$ für alle $1 \leq i, j \leq n$?

Antwort: Ja

Begründung:

Wähle $R = \mathbb{Z}$, $n=2$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Dann $\det M = 1 \in R^\times$, aber $2, 3, 4 \notin R^\times$.

b) Ist der Schnitt zweier Erzeugendensysteme eines K-Vektorraums V immer ein Erzeugendensystem von V?

Antwort: Nein

Begründung:

ZB $V = K^2$, Erzeugendensysteme $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Dann $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \emptyset$.

c) Gibt es in einem Körper nur die trivialen Ideale, nämlich das Nullideal und den Körper selbst?

Antwort: Ja

Begründung:

Sei $I \subset K$ ein Ideal. Angenommen $I \neq \{0\}$. Sei $a \in I$ mit $a \neq 0$. Für jedes $b \in K$ ist dann auch $ba^{-1} \cdot a \in I$, also $b \in I$. Somit $I = K$.

d) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Wenn $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, R)$ mit $AB \in \mathrm{GL}(n, R)$, gilt dann auch: $A \in \mathrm{GL}(n, R)$ und $B \in \mathrm{GL}(n, R)$?

Antwort: Ja

Begründung:

Sei $x = \det(AB)$. Da $AB \in GL(n,R)$ gilt $x \in R^{\times}$.
Da auch $x = \det A \cdot \det B$ folgt
$\det A \cdot (\det B \cdot x^{-1}) = x x^{-1} = 1$ und
$\det B \cdot (\det A \cdot x^{-1}) = 1$, also $\det A, \det B \in R^{\times}$.

e) Ist "orthogonal sein" eine Äquivalenzrelation für Vektoren in einem Euklidischen oder unitären Vektorraum?

Antwort: Nein

Begründung:

Die Relation ist nicht reflexiv: für $v \neq 0$ gilt nie, dass $v \perp v$.

$\boxed{A2}$ (5)

a) Sei $k>0$ s.d. $x^k=0$. Setze $y=\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^\ell x^\ell$. Dann

$$(1+x)\,y = \sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^\ell x^\ell + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^\ell x^{\ell+1}}_{\underset{n=\ell+1}{=}\ \sum_{n=1}^{k}(-1)^{n-1}x^n}$$

(2P)
$$\underset{x^k=0}{=} 1 + \sum_{\ell=1}^{k-1}(-1)^\ell x^\ell + (-1)\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n x^n = 1$$

b) Sei $y=u^{-1}x$ und sei $k>0$ s.d. $x^k=0$. Dann auch $y^k=0$, da R kommutativ ist. Nach a) ex. z s.d. $(1+y)z=1$. Damit

$$(x+u)\cdot u^{-1}z = (1+u^{-1}x)z = (1+y)z = 1$$

(1P) Also $x+u\in R^*$.

c) Sei $x\in R^*$. Wähle $z=f(x^{-1})\in S$. Dann

$$f(x)\cdot z = f(x)f(x^{-1}) \underset{\substack{\uparrow\\ f\text{ Ringhom.}}}{=} f(xx^{-1}) = f(1) \underset{\substack{\uparrow\\ f\text{ einsetz.}}}{=} 1$$

(2P) Somit $f(x)\in S^*$.

$\boxed{A3}$ (5) Gauß Verfahren:

$$\begin{array}{l} \\ +(-3) \\ +4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \cdot\frac{-1}{5} \\ \cdot\frac{1}{6} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & -5 & -25 & -10 \\ 0 & 6 & 30 & 12 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ - \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(2P)

(1P) Ein x_0 mit $Ax_0 = b$: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1P) Alle x mit $Ax = 0$: $\ker A = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

(1P) Insges.: $\{x \mid Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$\boxed{A4}$ 4

Es gilt
$$\begin{aligned} \phi(1) &= 1 + 0 + 2 = 3 \\ \phi(X) &= 1 + 1 + 2X = 2 + 2X \\ \phi(X^2) &= 1 + 2X + 2X^2 \\ \phi(X^3) &= 1 + 3X^2 + 2X^3 \end{aligned}$$
(2P)

Somit
$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
(2P)

$\boxed{A5}$ 4

(2P) Es gilt $\dim V/U' = \dim V - \dim U' = 2$
Da $\dim U = 3$ gibt es keine injektive lineare Abb.
(2P) von U nach V/U'. Insbes. ist die Komposition
$$U \longrightarrow V \longrightarrow V/U'$$
nicht injektiv.

A6 (3)

$$\left[\begin{array}{l} N = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix} \\ \langle N, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \rangle = -6 \end{array}\right] \text{Nebenrechnung}$$

(3P) $$H = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \langle \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}, v \rangle = -6 \right\}$$

A7 (14)

a) $$P_A = \det\begin{pmatrix} -5-X & -8 & 0 \\ 4 & 7-X & 0 \\ 20 & 40 & -1-X \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -5-X & -8 \\ 4 & 7-X \end{vmatrix} \cdot (-1-X)$$

$$= \big(\underbrace{(-5-X)(7-X)+32}_{= -35-2X+X^2+32 \,=\, X^2-2X-3 \,=\, (X-3)(X+1)} \big)(-1-X)$$

(3P) $$= -(X+1)^2 (X-3)$$

(2P) b) Die Eigenwerte sind -1 und 3 (die Nullst. von P_A)

c) zu -1:

(2P) $$\ker\begin{pmatrix} -4 & -8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

(*) Gauß: $+1$, $+5\cdot$

$$\begin{matrix} -4 & -8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

zu 3:

(2P) $$\ker\begin{pmatrix} -8 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 20 & 40 & -4 \end{pmatrix} \underset{(**)}{=} \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

(**) Da Eigenraum zu -1 2dim, muss der Eigenraum von 3 1-dim. sein. $(1,-1,-5)$ liegt im Kern von $A-3\mathbb{1}$.

d) Da A diagonalisierbar ist (nach c) gibt es eine Basis
(1P) aus Eigenvektoren), gilt

(2P) $$m_A = (X+1)(X-3)$$

e) Da A diagonalisierbar ist, ist die JNF von A

(2P) $$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

[oder eine beliebige Permutation der Diagonaleinträge]

B1

4 1)

(1P) Beh.: $\phi^{-1}(\mathrm{id}_V) = \sum_{i\in I} v_i \otimes v_i^*$ [Bem.: I ist endl. nach Vorauss.]

(3P) Bew.: Genug, z.z., dass $\mathrm{id}_V = \phi(\sum_i v_i \otimes v_i^*)$. Für jedes $j \in I$ gilt

$$\phi\left(\sum_i v_i \otimes v_i^*\right)(v_j) = \sum_i v_i^*(v_j)\, v_i = \sum_i \delta_{i,j}\, v_i = v_j$$

Damit ist $\phi(\sum_i v_i \otimes v_i^*) = \mathrm{id}_V$ auf einer Basis von V gezeigt. □

3 2 a) Für alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $\lambda, \mu \in K$:

(2P) $$(f \circ b)(\lambda v + \mu v', w) \overset{b \text{ bilin.}}{=} f(\lambda\, b(v,w) + \mu\, b(v',w)) \overset{f \text{ lin.}}{=} \lambda\, f\circ b(v,w) + \mu\, f\circ b(v',w)$$

(1P) $$(f \circ b)(v, \lambda w + \mu w') = f(\lambda\, b(v,w) + \mu\, b(v,w')) = \lambda\, f\circ b(v,w) + \mu\, f\circ b(v,w')$$
(oder umgekehrt)

6 2 b) Die univ. Eig. des Tensorproduktes besagt: Für alle $\beta: V \times W \to Z$ bilin. ex. genau ein $\tilde{\beta}: V \otimes W \to Z$ lin., s.d. $\beta = \tilde{\beta} \circ \otimes$.

(1P) Setze $$\phi: \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, Z) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V \times W, Z), \quad f \longmapsto f \circ \otimes$$

(1P) Nach 2a) ist $f \circ \otimes$ bilin.

(2P) <u>Beh.</u>: ϕ ist surjektiv.
<u>Bew.</u>: Sei $\beta : V \times W \to Z$ bil. Nach univ. Eig. existiert $\tilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, Z)$ s.d. $\phi(\tilde{\beta}) = \tilde{\beta} \circ \otimes = \beta$. $\square$

(2P) <u>Beh.</u>: ϕ ist injektiv.
<u>Bew.</u>: Sei $f \circ \otimes = g \circ \otimes$. Nach Eindeutigkeit in der univ. Eig. folgt $f = g$. $\square$

5 2c) Nach 2b) genügt es, einen K-lin. Iso.

$$\Psi : \mathrm{Bil}(V \times W, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}_K(W, Z))$$

(1P) anzugeben. Für $\beta : V \times W \to Z$ bil. setze $\Psi(\beta)(v) = \beta(v, -)$.

(2P) <u>Beh.</u>: Ψ ist injektiv.
<u>Bew.</u>: Angenommen, $\Psi(\beta) = 0$. Dann ist für alle $v \in V, w \in W$ $0 = (\Psi(\beta)(v))(w) = \beta(v, w)$. Also ist $\beta = 0$. $\square$

<u>Beh.</u>: Ψ ist surjektiv.
<u>Bew.</u>: Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, Z))$ gegeben. Setze $\beta(v, w) := (f(v))(w)$. Da $f(v) : W \to Z$ linear ist, ist $\beta(v, w)$ linear in w. Ferner gilt für alle $v, v' \in V$, $w \in W$, $\lambda, \mu \in K$:

$$\begin{aligned}
\beta(\lambda v + \mu v', w) &= (f(\lambda v + \mu v'))(w) \\
&= (\lambda f(v) + \mu f(v'))(w) = \lambda (f(v))(w) + \mu (f(v'))(w) \\
&= \lambda \beta(v, w) + \mu \beta(v', w)
\end{aligned}$$

(1P) Also ist $\beta(v, w)$ auch linear in v.

Somit $\beta \in \mathrm{Bil}(V\times W, Z)$, und per Konstruktion

(1P) $$((\Psi(\beta))(v))(w) \underset{\text{Def } \Psi}{=} \beta(v,w) \underset{\text{Def } \beta}{=} (f(v))(w).$$ $\square$

3 3a) Seien $f, g \in U^\wedge$, $\lambda, \mu \in K$. Dann gilt für alle $u \in U$:

$$(\lambda f + \mu g)(u) = \lambda f(u) + \mu g(u) = 0$$

(2P) Somit $\lambda f + \mu g \in U^\wedge$.
(1P) Ferner ist $0(u) = 0$ für alle $u \in U$ und somit $0 \in U^\wedge$.

4 3b) Sei $$F : W^* \longrightarrow U^*, \quad \varphi \longmapsto \varphi|_U$$

(2P) Beh.: $\ker F = U^\wedge$.
Bew.: $F(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi|_U = 0 \Leftrightarrow \forall u \in U : \varphi(u) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in U^\wedge$. $\square$

(2P) Nach dem Isomorphiesatz folgt, dass $W^*/U^\wedge \longrightarrow U^*$, $\varphi + U^\wedge \longmapsto F(\varphi)$ wohldef. und ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.

B2

6 1)

(2P) <u>symmetrisch</u> : Für alle $A, B \in W$ gilt

$$\beta(A,B) = tr(AB) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spur zyklisch}}}{=} tr(BA) = \beta(B,A).$$

(2P) <u>bilinear</u> : Für alle $A, B, C \in W$, $\lambda, \mu \in K$ gilt:

$$\beta(\lambda A + \mu B, C) = tr((\lambda A + \mu B)C) = tr(\lambda AC + \mu BC)$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spur linear}}}{=} \lambda\, tr(AC) + \mu\, tr(BC) = \lambda\, \beta(A,C) + \mu\, \beta(B,C) \quad (*)$$

Dass $\beta(A,B)$ linear im 2. Argument ist, folgt aus $(*)$ und Symmetrie von β.

(2P) <u>nicht-entartet</u>: Sei $\beta(A,B) = 0$ für alle $B \in W$.
Setze $B = E_{ij}$. Dann

$$\beta(A, E_{ij}) = tr(A E_{ij}) = \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} \underbrace{(E_{ij})_{lk}}_{= \delta_{il}\delta_{jk}} = A_{ji}$$

Somit $A_{ji} = 0$ für alle $i,j \in \{1, \dots, n\}$,
d.h. $A = 0$.

2 2) Es gilt $tr(M) = tr(M^T)$. Daher

$$\beta(A^T, B^T) = tr(A^T B^T) = tr((BA)^T) = tr(BA)$$
$$= tr(AB) = \beta(A,B).$$

(2) 3)

(1P) Da $O^T = O$ ist $O \in \mathcal{U}$.

Seien $A, B \in \mathcal{U}$ und $\lambda, \mu \in K$. Dann

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T \underset{A,B \text{ sym.}}{=} \lambda A + \mu B$$

(1P) Somit ist $\lambda A + \mu B$ symmetrisch, also in $\mathcal{U}$.

(3) 4) [Nebenrechnung: Wenn $A = A^T$ gilt, ist A durch A_{ij} mit $i \le j$ festgelegt. Die A_{ij} $(i \le j)$ können beliebig gewählt werden. Dies sind $\frac{n(n+1)}{2}$ Einträge]

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 5)

(1P) Da $O^T = -O$ ist $O \in V$.

Seien $A, B \in \mathcal{U}$ und $\lambda, \mu \in K$. Dann

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T \underset{A,B \text{ schiefsym.}}{=} -\lambda A - \mu B = -(\lambda A + \mu B)$$

(1P) Somit ist $\lambda A + \mu B$ schiefsym.

(5) 6)

(3P) <u>Beh.</u>: $W = \mathcal{U} + V$

<u>Bew.</u>: Sei $M \in W$ beliebig. Setze $S = M + M^T$, $A = M - M^T$.
Dann

$$S^T = M^T + M^{TT} = S \quad , \quad A^T = M^T - M^{TT} = -A \; ,$$

also $S \in \mathcal{U}$, $A \in V$. Ferner

$$M = \tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} A .$$

$\square$

(2P) Beh.: $\mathcal{U} \cap V = \{0\}$.
Bew.: Sei $M \in \mathcal{U} \cap V$. Dann $M = M^T$ und $M = -M^T$.
Also $M = -M$, d.h. $2M = 0$, also $M = 0$. $\square$

Insges. folgt $W = \mathcal{U} \oplus V$.

5 7)
(2P) Beh. 1: $V \subset \mathcal{U}^\perp$
Bew.: Sei $A \in V$. Dann $A = \frac{1}{2}(A - A^T)$ und für alle $u \in \mathcal{U}$:

$$\beta(A,u) = \beta\left(\tfrac{1}{2}(A - A^T), u\right) = \tfrac{1}{2}\beta(A,u) - \tfrac{1}{2}\underbrace{\beta(A^T,u)}_{\underset{2)}{=}\beta(A,u^T) \underset{u\in\mathcal{U}}{=} \beta(A,u)}$$

$$= 0$$

$\square$

(3P) Beh. 2: $\mathcal{U}^\perp \subset V$
Bew.: Sei $M \in \mathcal{U}^\perp$. Nach 6) gilt $M = S + A$ mit $S \in \mathcal{U}$, $A \in V$. Nach Beh. 1 ist $\beta(A,u) = 0$ für alle $u \in \mathcal{U}$. Somit auch

$$\beta(S,u) = 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{U}. \qquad (*)$$

Sei $X \in W$ bel. Dann $X = u + v$ mit $u \in \mathcal{U}$, $v \in V$.
Es gilt

$$\beta(S,X) = \underbrace{\beta(S,u)}_{\underset{(*)}{=}0} + \underbrace{\beta(S,v)}_{\underset{\text{Beh 1}}{=}0,\ \text{da } v\in V,\ S\in\mathcal{U}} = 0$$

Da β nicht entartet ist, folgt $S = 0$. Somit $M = A \in V$.
$\square$

Alternativer Bew. zu Beh. 2:

Es gilt: $\quad \dim W - \dim U \overset{6.}{=} \dim V \overset{\text{Beh. 1}}{\leq} \dim U^\perp . \quad (*)$

Ferner:

$$U \cap U^\perp = \{ x \mid x \in U \text{ und } \underbrace{\forall u \in U : \beta(x,u) = 0}_{\Updownarrow} \}$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in U, v \in V : \beta(x, u+v) = 0$$

$\beta(x,v)=0$ wie in Beh. 1.

$$\underset{\substack{\text{6. und 1.} \\ (\beta \text{ nicht entartet})}}{\Leftrightarrow} \quad x = 0$$

$$= \{0\}$$

Sonit $\quad \dim U + \dim U^\perp \leq \dim W . \quad (**)$

Insgesamt

$$\dim V \overset{(*)}{\leq} \dim U^\perp \overset{(**)}{\leq} \underbrace{\dim W - \dim U}_{\underset{(*)}{=} \dim V}$$

Also $\quad \dim U^\perp = \dim V.$ $\qquad \square$

B3

4 1) Seien $U, V \in GL(n, K[X])$ s.d.

$$U M_A V^{-1} = \begin{pmatrix} c_1(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n(A) \end{pmatrix} \quad (*)$$

mit $c_i(A)$ der i-te Invariantenteiler von A. Dann auch

(2P) $$(U M_A V^{-1})^T = (V^{-1})^T (M_A)^T U^T$$

und da $(M_A)^T = M_{A^T}$, folgt mit $\tilde{U} = (V^{-1})^T \in GL(n, K[X])$ und $\tilde{V} = (U^T)^{-1} \in GL(n, K[X])$, dass

$$\tilde{U} M_{A^T} \tilde{V} \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} c_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & c_n(A) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & c_n(A) \end{pmatrix}$$

(2P) Da die Inv.teiler eindeutig sind, folgt $c_i(A) = c_i(A^T)$.

5 2) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}^*$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*. Sei $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Dann

2a) (1P) $A^T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}^*}(f^*)$. $\quad (*)$

(2P) Somit $P_f = P_A = (-1)^n c_1(A) \cdots c_n(A) \overset{1)}{=} (-1)^n c_1(A^T) \cdots c_n(A^T)$
$= P_{A^T} \underset{(*)}{=} P_{f^*}$.

2b) Es gilt $m_f = m_A = c_n(A) \overset{1)}{=} c_n(A^T) = m_{A^T} = m_{f^*}$.
(2P)

(8) 3) Es gilt A, B ähnlich $\Leftrightarrow$ $c_i(A) = c_i(B)$ $(i=1,2,3)$

(2P) „$\Rightarrow$": Ähnliche Matrizen haben die gleichen Invariantenteiler. Da P_A und m_A durch Inv. teiler ausgedrückt werden können, folgt die Aussage.

„$\Leftarrow$": Per Voraussetzung gilt

$$c_3(A) = c_3(B) \qquad (*)$$

$$c_1(A)\, c_2(A)\, c_3(A) = c_1(B)\, c_2(B)\, c_3(B)$$

$$\left(\Rightarrow c_1(A)\, c_2(A) = c_1(B)\, c_2(B) \qquad (**) \right)$$

<u>Fallunterscheidung</u>

(2P) $\deg c_3 = 3$: Dann $c_1 = c_2 = 1$, da $\deg(c_1 c_2 c_3) = 3$. Somit $c_i(A) = 1 = c_i(B)$ $(i=1,2)$ und mit $(*)$ folgt $A \sim B$.

(2P) $\deg c_3 = 2$: Dann $\deg c_2 = 1$, also $c_1(A) = 1 = c_1(B)$. Mit $(**)$ folgt $c_2(A) = c_2(B)$ und mit $(*)$, dass $A \sim B$.

(2P) $\deg c_3 = 1$: Dann $c_3(A) = X - \lambda = c_3(B)$ für ein $\lambda \in K$. Somit $m_A = X - \lambda = m_B$. Also $A - \lambda I = 0 = B - \lambda I$, d.h.

$$A = \lambda I = B.$$

(3) 4a) Sei $k>0$ s.d. $F^k = 0$.

(1P) Da F selbstadjungiert ist, ist F diagonalisierbar.

Da F nilpotent ist, gilt für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$:

(2P) Sei v ein Eigenvektor zu λ. Dann $0 = F^k v = \lambda^k v$, also $\lambda^k = 0$, also $\lambda = 0$.

Somit sind alle Eigenwerte 0, d.h. $F = 0$.

<u>Alternativ:</u> Da F nilpotent ist, kann man es triagonalisieren. [siehe LA2 Z6 A31]. Die Basiswechselmatrix im Gram-Schmidt-Verfahren hat obere Dreiecksgestalt. Somit gibt es eine <u>ON-Basis</u> $\mathcal{B}$ bzgl. der F obere Dreiecksgestalt hat, mit Nullen auf der Diagonalen. Sei $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$. Dann $M^{ad} \overset{(*)}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F^{ad}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F) = M$, wobei $(*)$ gilt, da $\mathcal{B}$ ON-Basis ist.

Da $M = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ und $M^{ad} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$ folgt $M = 0$, also $F = 0$.

(5) 4b) Da F selbstadjungiert ist, ist es diagonalisierbar und V besitzt eine ON-Basis $u_1, \dots, u_n$ aus Eigenvektoren

(1P) von F. Sei λ_i der zu u_i gehörende Eigenwert.

(2P) „$\Rightarrow$" Sei $v \in V \setminus \{0\}$. Schreibe $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$. Dann

$$(v, Fv) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_i u_i, \lambda_j x_j u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{x}_i x_j \lambda_j (u_i, u_j)$$

$$\underset{\text{ON-Basis}}{=} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i |x_i|^2 > 0,$$ da $\lambda_i > 0$ und nicht alle $|x_i|$ null sind.

(2P) „$\Leftarrow$" Es gilt $(u_i, F(u_i)) = (u_i, \lambda_i u_i) = \lambda_i (u_i, u_i) = \lambda_i$

Also $\lambda_i > 0$.