In der gesamten Klausur steht K für einen Körper.

Teil A

A1: Verständnisfragen [15 P]

Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie eine kurze Begründung.

a) Sei V ein K-Vektorraum, $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und U ein Untervektorraum von V. Gibt es dann immer eine Teilmenge $J \subset I$ so, dass $(v_i)_{i \in J}$ eine Basis von U ist?

(1P) **Antwort:** Nein

(2P) **Begründung:**

z.B. $V = K^2$, Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $U = K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Keiner der Basisvektoren liegt in U.

b) Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Welche der folgenden Zuordnungen definieren eine K-lineare Abbildung $\mathrm{End}_K(V) \otimes \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V)$?

$$(1) \quad f \otimes g \mapsto f + g\,, \qquad (2) \quad f \otimes g \mapsto \mathrm{tr}(f)\, g\ .$$

(1P) **Antwort:** (2)

Begründung:

(1P) (1) $(f,g) \longmapsto f+g$ ist nicht bilinear. ZB gilt

$(0,g) \longmapsto g \neq 0$ für $g \neq 0$

(1P) (2) Für $\lambda, \mu \in K$, $f_1, f_2, g \in \mathrm{End}\, V$ gilt:

$\mathrm{tr}(\lambda f_1 + \mu f_2) g = \lambda \,\mathrm{tr} f_1 \cdot g + \mu \,\mathrm{tr} f_2 \cdot g$ und

$\mathrm{tr}(g)(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \,\mathrm{tr} g \cdot f_1 + \mu \,\mathrm{tr} g \cdot f_2$

Somit ist $(f,g) \mapsto \mathrm{tr} f \cdot g$ bilinear.

c) Ist $\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(1,1,0,1)\} \subset \mathbb{F}_2^4$ ein Untervektorraum von $\mathbb{F}_2^4$?

(1P) **Antwort:** Nein

(2P) **Begründung:**

ZB. ist $(0,1,1,0) + (1,1,0,1) = (1,0,1,1)$ nicht in der Menge.

d) Wenn zwei Untervektorräume eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums das gleiche orthogonale Komplement haben, sind sie dann immer gleich?

(1P) **Antwort:** Ja

(2P) **Begründung:**

Seien $U_1, U_2 \subset V$ V endl. dim. unitär.

Dann $U_1^{\perp} = U_2^{\perp} \Rightarrow U_1^{\perp\perp} = U_2^{\perp\perp} \Rightarrow U_1 = U_2$.

e) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, $n \geq 1$. Wenn A und B ähnlich sind, sind dann immer auch A^T und B^T ähnlich?

(1P) **Antwort:** Ja

(2P) **Begründung:**

Sei $S \in GL(n,K)$ s.d. $B = SAS^{-1}$. Dann

$B^T = (S^{-1})^T A^T S^T = U A^T U^{-1}$ mit $U = (S^T)^{-1}$.

A2

(1P) a) $0 \in \text{tors} M$, da $r.0 = 0$ für jedes $r \neq 0$.

Seien $a, b \in \text{tors}(M)$ und $r, s \in R \setminus \{0\}$ s.d. $ra = 0$ und $sb = 0$. Da R Int.ber. ist $rs \neq 0$. Es gilt
$rs(a+b) \overset{(*)}{=} sra + rsb = 0$. $(*)$: R komm.

(1P) Also $a+b \in \text{tors}(M)$.

Sei $r \in R$, $a \in \text{tors} M$ und $s \in R \setminus \{0\}$ s.d. $sa = 0$.
Dann

$$s(ra) \overset{\substack{R\text{ komm.}\\ \downarrow}}{=} r(sa) = 0$$

(1P) Also $ra \in \text{tors}(M)$

(2P) b) Sei $m \in K[X]/\langle X^2 \rangle$ und $p \in K[X]$ s.d. $p + \langle X^2 \rangle = m$.
Dann $X^2 m = X^2(p + \langle X^2 \rangle) = X^2 p + \langle X^2 \rangle = \langle X^2 \rangle$
$= 0$ in M.
Also $m \in \text{tors} M$ für jedes $m \in M$.

A3

Es gilt $A \in GL(3,R) \Leftrightarrow \det A \in R^*$. Berechne

$$\det A = (-3)\cdot 1 \cdot 2 + (-2)(-1)2 + 2 \cdot 2 \cdot 1$$
$$- \{ (-3)(-1)1 + (-2)2\,2 + 2\,1\,2 \}$$

(1P) $$= -6 + 4 + 4 - 3 + 8 - 4 = 3$$

Erhalte:

(1P) $3 \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$, da $3 \cdot 3 = 1$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(1P) $3 \notin (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*$, da $3 \cdot 2 = 0$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

(1P) $3 \in \mathbb{Q}^*$, da $\mathbb{Q}$ Körper

Also ist A für $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ inv.bar, aber nicht für $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$\boxed{A4}$ Nebenrechnung:

$$f = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 2i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gauß}: \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 2i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow -i\cdot() \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit hat f Rang 2 und somit $\operatorname{im} f = \mathbb{C}^2$.

Ergebnis:

(2P) $\ker f$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

(1P) $\operatorname{im} f$ hat Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\boxed{A5}$ Bilder der Basisvektoren:

Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{12} + E_{22} =: M$

$$\begin{aligned} \Phi(E_{11}) &= (E_{11})^T + \operatorname{tr}(E_{11})\, M = E_{11} + M \\ \Phi(E_{12}) &= (E_{12})^T + \operatorname{tr}(E_{12})\, M = E_{21} \\ \Phi(E_{21}) &= E_{12} \\ \Phi(E_{22}) &= E_{22} + M \end{aligned}$$

(3P)

Somit

(2P)
$$\mathcal{M}_B(\Phi) = \begin{array}{c|cccc} & E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \\ \hline E_{11} & 2 & 0 & 0 & 1 \\ E_{12} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ E_{21} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E_{22} & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

↑ zur Übersichtlichkeit, nicht Teil der Lös.

$\boxed{A6}$ a) $P_A = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & -2 \\ -18 & 3-X & -9 \\ 8 & 0 & 7-X \end{vmatrix}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Entw. nach 1. Zeile}}}{=} (-1-X) \cdot \begin{vmatrix} 3-X & -9 \\ 0 & 7-X \end{vmatrix} - 0 + (-2) \begin{vmatrix} -18 & 3-X \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(1+X)(3-X)(7-X) + 2 \cdot 8 \cdot (3-X)$$
$$= (3-X)(-7-6X+X^2+16)$$

(4P) $= (3-X)(X-3)^2 = -(X-3)^3$

(2P) b) 3 ist die einzige Nullstelle von P_A und daher der einzige Eigenwert von A.

c) Berechne $\ker(A-3I)$ via Gauß:

(1P) $$\begin{matrix} \\ -\frac{9}{2}\cdot \\ +2\cdot \end{matrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -18 & 0 & -9 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2P) Somit hat $\mathrm{Eig}(A,3)$ die Basis $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

d) <u>Variante 1</u>:

Da $m_A \mid P_A$ gilt $m_A \in \{ X-3, (X-3)^2, (X-3)^3 \}$

Da $A \neq 3 \cdot I$ ist $m_A \neq X-3$.

Es gilt $(A-3I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -18 & 0 & -9 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 = 0$

(3P) Also $m_A = (X-3)^2$.

<u>Variante 2</u>:

Da 3 der einzige Eigenwert ist und $\dim \mathrm{Eig}(A,3) = 2$ hat die JNF von A einen Block der Größe 1 und

(3P) einen der Größe 2. Daher $m_A = (X-3)^2$.

e) Berechne die Invarianteneiler. Nach d) ist
$c_3 = (X-3)^2$. Da $c_1 c_2 c_3 = P_A = (X-3)^3$ folgt
(2P) $c_1 c_2 = X-3$. Da $c_1 | c_2$ muss gelten $c_1 = 1,\ c_2 = X-3$.

Sonit ist die Frobenius Normalform von A

(1P)
$$\left(\begin{array}{c|c} B_{c_2} & \\ \hline & B_{c_3} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A7}$ Nebenrechnung:

Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Schritt: $e_1 = v_1$

2. Schritt: $f_2 := v_2 - \langle e_1, v_2 \rangle e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Somit $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Schritt: $f_3 := v_3 - \langle e_1, v_3 \rangle e_1 - \langle e_2, v_3 \rangle e_2$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \sqrt{1/4 + 1/4}^{\,-1} f_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

(3× 1P) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{B1}$

⑥ 1) <u>Beh</u> Sei f inj. Dann ist $(f(v_i))_{i\in I}$ lin. unabh.

⌜ Sei $J \subset I$ endl. s.d. $\sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j) = 0 \quad (\lambda_j \in K)$.

Dann

$$0 = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j) = f\Big(\sum_{j\in J} \lambda_j v_j\Big)$$

Da f inj. folgt $\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0$. Da $(v_i)_{i\in I}$ lin. unabh. folgt $\lambda_j = 0$ für alle $j \in J$. ⌟

(3P)

<u>Beh</u> Sei $(f(v_i))_{i\in I}$ lin. unabh. Dann ist f inj.

⌜ Sei $f(v) = 0$ für ein $v \in V$. Da $(v_i)_{i\in I}$ Basis, gibt es $J \subset I$ endl. und $\lambda_j \in K$: $v = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j$. Dann

$$0 = f(v) = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j).$$

Da $(f(v_i))_{i\in I}$ lin. unabh. folgt $\lambda_j = 0$ $(j\in J)$, also auch $v = 0$. ⌟

(3P)

④ 2) <u>Variante 1:</u>

Wähle $V = \mathrm{Map}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}, K)$ und die Basis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von V, wobei $e_i(j) = \delta_{i,j}$. Def. $g \in \mathrm{End}_K V$ auf dieser Basis als

$$g(e_i) = \begin{cases} 0 & ; i=1 \\ e_{i-1} & ; i>1 \end{cases}$$

Dann $g(e_1) = 0$ (g nicht injektiv), aber jedes e_i $(i\in\mathbb{N})$ liegt im Bild, da $e_i = g(e_{i+1})$ $(i\in\mathbb{N})$ (g ist surjektiv).

(4P)

<u>Variante 2:</u>

Wähle $V = K[X]$ und $g \in \mathrm{End}_K V$ als $g(p) = \frac{d}{dx} p$.

Dann $g(1) = 0$ (nicht inj.) und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$X^n = g\left(\frac{1}{n+1} X^{n+1}\right)$ (g ist surjektiv).

(4P)

⑦ 3) (a) ⇒ (b): Sei $h : W \to T$ bel. mit $h \circ f = 0$.
Sei $w \in W$ bel. Da f surj, gibt es $v \in V$ mit $w = f(v)$.
Dann $h(w) = h(f(v)) = 0$, da $h \circ f = 0$.
Also

(3P) $h(w) = 0$ für alle $w \in W$, d.h. $h = 0$.

(b) ⇒ (a): Wir zeigen $\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$.
Sei also f nicht surjektiv. Dann gibt es $x \in W$, $x \notin \operatorname{im} f$.
Setze $T = W/_{\operatorname{im} f}$ und $h := \pi : W \to W/_{\operatorname{im} f}$ die kanon.

(2P) Projektion.
Dann $h \neq 0$, da $h(x) = x + \operatorname{im} f \neq \operatorname{im} f$ wegen $x \notin \operatorname{im} f$.
Ferner $h \circ f = 0$, da für alle $v \in V$:

(2P) $h(f(v)) = f(v) + \operatorname{im} f = \operatorname{im} f = 0$ in T.

Also gilt (b) nicht.

④ 4) Die Aussage ist falsch.

(1P) ZB.: $V = W = K^2$, $U = V$, $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Da g_1, g_2 nicht inv.bar, folgt $\ker g_1 \neq \{0\}$, $\ker g_2 \neq \{0\}$,
also $g_1, g_2 \in Z$. Aber $g_1 + g_2 = I$ hat Kern $\{0\}$.

(3P) Somit $g_1 + g_2 \notin Z$.

④ 5) Die Aussage ist wahr: Es gilt $0 \in Z'$, denn $\operatorname{im} 0 = \{0\} \subset U'$.

(1P) Seien $g_1, g_2 \in Z'$ und $\lambda, \mu \in K$. Dann gilt für alle $v \in V$:

$$(\lambda g_1 + \mu g_2)(v) = \lambda \underbrace{g_1(v)}_{\in U'} + \mu \underbrace{g_2(v)}_{\in U'} \in U'$$

, da U' UnterVR.

(3P) Somit $\operatorname{im}(\lambda g_1 + \mu g_2) \subset U'$, also $\lambda g_1 + \mu g_2 \in Z'$.

$\boxed{\text{B2}}$

⑤ 1) Dimensionsformel : $\dim \operatorname{im} A + \dim \ker A = \dim K^7 = 7$

Da $\dim \operatorname{im} A \leq 3$ folgt $\dim \ker A \geq 4$.

(2P) Genauso : $\dim \ker B \geq 4$.

Sei $U := \ker A + \ker B \subset V$. Angenommen, $\ker A \cap \ker B = \{0\}$. Dann $U = \ker A \oplus \ker B$ und somit $\dim U = \dim \ker A + \dim \ker B \geq 8$.

(3P) Aber $U \subset K^7$, also $\dim U \leq 7$. ↯

Somit $\ker A \cap \ker B \neq \{0\}$.

⑤ 2) Sei $q = id - p$. Dann $q^2 = (id-p)(id-p) = id - 2p + p \circ p = q$, da $p \circ p = p$. Somit ist auch q eine Projektion.

Beh.: Sei $y \in \operatorname{im} q$. Dann $q(y) = y$

⌈ Sei $y = q(v)$ für ein $v \in V$. Dann $q(y) = qq(v) \overset{qq=q}{=} q(v) = \underline{y}.$ ⌋

Sei $x \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in \ker p &\Leftrightarrow p(x) = 0 \Leftrightarrow (id-p)(x) = x \\ &\underset{(*)}{\Leftrightarrow} x \in \operatorname{im} q \end{aligned}$$

wobei (*) :

(3P) $\Rightarrow$ per Def. und $\Leftarrow$ nach Beh.

Also $\ker p = \operatorname{im}(id-p)$.

Anwenden dieser Aussage auf die Projektion q ergibt

(2P) $\ker(id-p) = \operatorname{im}(p)$.

⑤ 3a) <u>Beh.:</u> Für alle $x, y, z \in V_2$, $\lambda, \mu \in K$ gilt

$$\beta_2(f(\lambda x + \mu y), z) = \beta_2(\lambda f(x) + \mu f(y), z)$$

⌈ Da f surj. gibt es $a \in V_1$ s.d. $z = f(a)$. Damit:

$$\begin{aligned} \beta_2(f(\lambda x + \mu y), z) &= \beta_2(f(\lambda x + \mu y), f(a)) \\ &= \beta_1(\lambda x + \mu y, a) = \lambda \beta_1(x, a) + \mu \beta_1(y, a) \\ &= \lambda \beta_2(f(x), f(a)) + \mu \beta_2(f(y), f(a)) \\ &= \beta_2(\lambda f(x) + \mu f(y), z). \end{aligned}$$

(4P) ⌋

Da β_2 nicht-entartet ist, folgt:

$$\forall x, y \in V_2, \lambda, \mu \in K: f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

(1P) d.h. f ist K-linear.

④ 3b) Noch z.z.: f ist injektiv. Sei $f(a) = 0$ für ein $a \in V_1$. Dann gilt für alle $b \in V_1$:

(3P) $$0 = \beta_2(f(a), f(b)) = \beta_1(a, b).$$

(1P) Da β_1 nicht-entartet ist, folgt $a = 0$.

⑥ 4) Angenommen, es gibt $x' \in V$ mit $\beta(x',x') > 0$ und $y' \in V$ mit $\beta(y',y') < 0$.

Setze $x = \frac{1}{\sqrt{\beta(x',x')}}\, x'$ s.d. $\beta(x,x) = 1$ und

(1P) $y = \frac{1}{\sqrt{|\beta(y',y')|}}\, y'$ s.d. $\beta(y,y) = -1$.

Variante 1:

Betrachte

$$f(\lambda) = \beta(x+\lambda y, x+\lambda y) = 1 + \underbrace{\bar{\lambda}\,\beta(y,x) + \lambda\,\beta(x,y)}_{= 2\,\mathrm{Re}(\lambda\beta(x,y))} - |\lambda|^2$$

(2P)

(1P) Falls $\beta(x,y) = 0$, ist $f(\lambda) = 0$ für $\lambda = 1$. ↯

Falls $\beta(x,y) \neq 0$ setze $\lambda = r\,\overline{\beta(x,y)}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Dann

$$f(\lambda) = 1 + 2r\,|\beta(x,y)|^2 - r^2\,|\beta(x,y)|^2$$

Dies ist $+1$ für $r = 0$ und negativ für große r und hat

(2P) daher Nullstellen. ↯

Variante 2:

(1P) Betrachte $a = y - \beta(x,y)\,x$. Dann

$$\beta(x,a) = \beta(x,y) - \beta(x,y)\,\beta(x,x) = 0$$

$$\beta(a,a) = \beta(y,y) - \beta(x,y)\,\beta(y,x) - \overline{\beta(x,y)}\,\beta(x,y) + |\beta(x,y)|^2\,\beta(x,x)$$

(2P) $$= -1 - 2\,|\beta(x,y)|^2 + |\beta(x,y)|^2 < 0$$

$\beta(y,x) = \overline{\beta(x,y)}$ ↗

Setze $b = \frac{1}{\sqrt{|\beta(a,a)|}}\, a$, so dass $\beta(b,b) = -1$.

(2P) Dann $\beta(x,b) = 0$ und $\beta(x+b, x+b) = \beta(x,x) + \beta(b,b) = 0$. ↯

$\boxed{B3}$

③ 1a) Betrachte die Abb. $g: V \longrightarrow V/U$.

$v \longmapsto f(v)+U$

Da für $u \in U$ gilt $g(u) = f(u) + U = U = 0$ in V/U (denn U ist f-invariant, also $f(u) \in U$), gilt $U \subset \ker g$. Daher ex. ein eind. $\bar{f} : V/U \to V/U$ mit

$$\bar{f}(v+U) := g(v)$$

[Bem.: Das ist LA1 A39]

③ 1b) Es genügt, z.z., dass $m_f(\bar{f}) = 0$. Sei $m_f = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$.

(1 P) Dann gilt für alle $v \in V$:

$$m_f(\bar{f})(v+U) = \sum_{i=0}^{k} a_i \underbrace{\bar{f}^i(v+U)}_{\overset{(*)}{=} f^i(v)+U} = \sum_{i=0}^{k} a_i f^i(v) + U$$

$$= m_f(f)(v) + U$$

(2P) $$= 0 \text{ in } V/U.$$

wobei (*): Per Def. $\bar{f}(v+U) = g(v) = f(v) + U$ und somit auch $\bar{f}(\bar{f}(v+U)) = \bar{f}(f(v)+U) = f^2(v) + U$ etc.

⑥ 2) $n = \dim V$ und $c_1, \dots, c_n$ die Inv. teiler von f. Dann gilt

(2P) $$c_1 \cdots c_n = (-1)^n P_f = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{m_i} , \quad c_n = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{m_i - 1}$$

Daher $c_1 \cdots c_{n-1} = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)$ und da $c_i \mid c_{n-1}$ für $i = 1, \dots, n-2$ muss gelten

(2P) $$c_1, \dots, c_{n-2} = 1 , \quad c_{n-1} = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)$$

Die Inv. teiler, und damit die Jordansche Normalform, liegen somit eindeutig fest.
Die JNF besteht aus den Kästchen

(2P) $$J(\lambda_i, 1) , \quad J(\lambda_i, m_i - 1) \qquad (i = 1, \dots, k) .$$

⑥ 3) Da $f^2 = id$ folgt $p(f) = 0$ für $p = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$.

(2P) Damit ist $m_f \in \{X-1, X+1, (X+1)(X-1)\}$, denn $m_f \mid p$.

Da char $K \neq 2$ ist $1 \neq -1$ und somit zerfällt m_f in jedem Fall in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

(2P) Also ist f diagonalisierbar.

(Nebenrechnung: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : K^2 \to K^2$ mit $K = \mathbb{F}_2$ erfüllt $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da M in JNF ist, ist M nicht diag.bar.)

(2P) Ergebnis: $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : K^2 \to K^2$ ist ein Gegenbeispiel für $K = \mathbb{F}_2$.

⑤ 4a) Es gilt

$$F(h) = h + \varphi(h)h = h$$
$$F(v_i) = v_i + \varphi(v_i)h \qquad (i = 2, \dots, n)$$

Somit

$$\mathcal{M}_B(F) = \begin{array}{c|ccccc} & h & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \\ \hline h & 1 & \varphi(v_2) & \varphi(v_3) & \cdots & \varphi(v_n) \\ v_2 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ v_n & 0 & \vdots & \cdots & 0 & 1 \end{array}$$

(2P)

(1P) $\det \mathcal{M}_B(F) = 1$, da obere Dreiecksmatrix mit 1 auf Diag.

Das char. Poly $P_F = \det(\mathcal{M}_B(F) - XI) = (1-X)^n$ hat

(2P) nur die Nullstelle 1 — dies ist der einzige Eigenwert.

② 4b) Da 1 der einzige Eigenwert von F ist, gilt:

$$F \text{ diag. bar} \Leftrightarrow m_F = X - 1 \Leftrightarrow F = id \Leftrightarrow \varphi(v_i) = 0 \ (i = 2, \dots, n)$$

Da $\varphi \neq 0$ aber $\varphi(h) = 0$ gilt $\varphi(v_i) \neq 0$ für mind. ein i. Somit ist F nicht diag. bar.