Lineare Algebra – Klausur 1

(29.7.2015 – Dozent: Ingo Runkel)

Name	
Vorname	
Matrikelnr.	

Anweisungen:

- Hilfsmittel: Für die Bearbeitung sind **nur Stift und Papier** erlaubt. Benutzen Sie einen permanenten Stift (Kugelschreiber o.ä., keinen Bleistift). Es sind **keine Mobiltelefone** erlaubt. Mobiltelefonklingeln wird als Täuschungsversuch gewertet.
- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf **jedes Blatt**, das Sie abgeben, und heften Sie vor der Abgabe alle Blätter und die Klausuraufgaben mit einem Tacker zusammen.
- Die Klausur besteht aus 2 Teilen, **Teil A** und **Teil B**. Für jeden Teil gibt es 50 Punkte.
  - Die Aufgaben aus Teil A geben insgesamt 50 Punkte. **Bearbeiten Sie alle Aufgaben aus Teil A**.
  - Teil B besteht aus 3 Aufgaben zu je 25 Punkten. **Es werden nur die besten beiden Aufgaben aus Teil B gewertet**.

Für die Korrektur:

Teil A	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Gesamt
Punkte								

Teil B	B1	B2	B3	Gesamt
Punkte				

In der gesamten Klausur steht K für einen Körper.

Teil A

A1: Verständnisfragen [15 P]

Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie eine kurze Begründung.

a) Sei V ein K-Vektorraum, $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und U ein Untervektorraum von V. Gibt es dann immer eine Teilmenge $J \subset I$ so, dass $(v_i)_{i \in J}$ eine Basis von U ist?

Antwort: ________________

Begründung:

b) Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Welche der folgenden Zuordnungen definieren eine K-lineare Abbildung $\mathrm{End}_K(V) \otimes \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V)$?

$$(1) \quad f \otimes g \mapsto f + g\,, \qquad (2) \quad f \otimes g \mapsto \mathrm{tr}(f)\, g\,.$$

Antwort: ________________

Begründung:

c) Ist $\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(1,1,0,1)\} \subset \mathbb{F}_2^4$ ein Untervektorraum von $\mathbb{F}_2^4$?

Antwort:________________

Begründung:

d) Wenn zwei Untervektorräume eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums das gleiche orthogonale Komplement haben, sind sie dann immer gleich?

Antwort:________________

Begründung:

e) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, $n \geq 1$. Wenn A und B ähnlich sind, sind dann immer auch A^T und B^T ähnlich?

Antwort:________________

Begründung:

In der gesamten Klausur steht K für einen Körper.

A2 [5 P]

Sei R ein Integritätsbereich und M ein R-Modul. Betrachten Sie die Menge

$$\operatorname{tors}(M) = \{m \in M \mid \exists\, 0 \neq r \in R : rm = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{tors}(M)$ ein Untermodul von M ist.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{tors}(M) = M$ für den $K[X]$-Modul $M := K[X]/\langle X^2 \rangle$.

A3 [4 P]

Sei $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3 \times 3, R)\ .$$

Entscheiden Sie, mit Begründung, für welche der Ringe R die Matrix A in $\operatorname{GL}(3, R)$ ist.

A4 [3 P]

Sei $f \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die (x_1, x_2, x_3) auf $(2x_1 + ix_2, 2ix_1 + x_2 - x_3)$ abbildet. Geben Sie eine Basis von $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ an. (Nur das Ergebnis wird gewertet.)

A5 [5 P]

Sei $V = \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und betrachten Sie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\Phi \colon V \to V, \quad A \mapsto A^T + \operatorname{tr}(A) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die Basis von V mit $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Geben Sie – mit Rechnung – die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ von Φ an.

A6 [15 P]

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -18 & 3 & -9 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Geben Sie – mit Rechnung –

a) das charakteristische Polynom,

b) die Eigenwerte,

c) Basen der Eigenräume,

d) das Minimalpolynom (dies geht auch ohne Gauß) und

e) die Frobenius-Normalform

von A an.

A7 [3 P]

Führen Sie das Gram–Schmidt-Verfahren für die folgende Basis des $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt durch. Geben Sie nur das Ergebnis an (nur dieses wird gewertet).

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(Sie brauchen nicht zu überprüfen, dass dies eine Basis ist.)

Teil B

- Sie können alle Sätze aus der Vorlesung verwenden. Ergebnisse der Übungsaufgaben dürfen Sie natürlich nur dann verwenden, wenn Sie diese nicht gerade zeigen sollen.
- Fangen Sie für jede der Aufgaben B1, B2, B3 ein **neues Blatt** an.
- **In der gesamten Klausur steht K für einen Körper.**

B1

Seien V, W K-Vektorräume.

1. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $f\colon V \to W$ sei K-linear. Zeigen Sie, dass f injektiv ist genau dann, wenn die Menge $(f(v_i))_{i \in I}$ linear unabhängig ist.
2. Zeigen Sie, dass ein K-Vektorraum V und eine K-lineare Abbildung $g\colon V \to V$ existiert, welche surjektiv, aber nicht injektiv ist.
3. Sei $f\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.
   (a) f ist surjektiv.
   (b) Für alle K-Vektorräume T und K-linearen Abbildungen $h\colon W \to T$ gilt: $h \circ f = 0 \;\Rightarrow\; h = 0$.
4. Sei $U \neq \{0\}$ ein Untervektorraum von V. Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Menge
$$Z = \{g \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid \ker(g) \cap U \neq \{0\}\}$$
   ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.
5. Sei U' ein Untervektorraum von W. Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Menge
$$Z' = \{g \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid \mathrm{im}(g) \subset U'\}$$
   ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

B2

1. Seien $A, B\colon K^7 \to K^3$ zwei K-lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass
$$\ker(A) \cap \ker(B) \neq \{0\} \ .$$

2. Sei V ein K-Vektorraum, und sei $p \in \mathrm{End}_K(V)$ eine Projektion, d.h. $p \circ p = p$. Zeigen Sie: $\mathrm{im}(\mathrm{id} - p) = \ker(p)$ und $\ker(\mathrm{id} - p) = \mathrm{im}(p)$.

3. Seien V_1, V_2 Vektorräume und β_1, β_2 Bilinearformen auf V_1 bzw. V_2. Sei $f\colon V_1 \to V_2$ eine surjektive Abbildung mit $\beta_1(v, w) = \beta_2(f(v), f(w))$ für alle $v, w \in V_1$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Die Abbildung f ist K-linear, wenn β_2 nicht-entartet ist.
   (b) Die Abbildung f ist ein Isomorphismus, falls β_1 und β_2 beide nicht-entartet sind.

4. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und β eine hermitesche Sesquilinearform auf V mit der Eigenschaft, dass $\beta(v, v) \neq 0$ für alle $0 \neq v \in V$ gilt. Zeigen Sie, dass entweder β oder $-\beta$ positiv definit ist.

B3

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus.

1. Sei $U \subset V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Zeigen Sie:
   (a) Die Abbildung f induziert eine K-lineare Abbildung $\overline{f}\colon V/U \to V/U$.
   (b) Das Minimalpolynom $m_{\overline{f}}$ teilt das Minimalpolynom m_f.

2. Die Abbildung f habe das charakteristische Polynom $P_f = \prod_i (\lambda_i - X)^{m_i}$ und Minimalpolynom $m_f = \prod_i (X - \lambda_i)^{m_i - 1}$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und $m_i \geq 2$ für alle i gilt. Zeigen Sie, dass dadurch die Jordansche Normalform von f festgelegt ist, und bestimmen Sie diese.

3. Sei $\mathrm{char} K \neq 2$ und $f^2 = \mathrm{id}$. Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist. Geben Sie – ohne Beweis – ein Gegenbeispiel für diese Aussage, wenn $\mathrm{char} K = 2$.

4. Sei $n = \dim_K(V) \geq 2$, $\varphi \in V^*\backslash\{0\}$ und $h \in V\backslash\{0\}$ mit $h \in \ker(\varphi)$. Betrachten Sie die K-lineare Abbildung $F\colon V \to V$, $v \mapsto v + \varphi(v)h$.
   (a) Berechnen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$, $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)) = \det(F)$ und die Eigenwerte von F, wobei $\mathcal{B} = (h, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis von V mit erstem Basisvektor h ist.
   (b) Ist F diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.