Lösungshinweise zum Pfingstblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu Aufgabe P1 (7 P)

1. [1 P] Reflexivität und Symmetrie von $\sim$ sind klar. Ist $ru = ts$ und $tw = uv$, dann ist $ruw = tsw = uvs$, folglich $u(rw - vs) = 0$, also, da $u \neq 0$ und R ein Integritätsbereich ist, $rw = vs$, was die Transitivität von $\sim$ liefert.

2. [2 P] Es ist klar, dass $\frac{r}{s} = \frac{rt}{st}$ für $t \neq 0$. Da R ein Integritätsbereich ist, bemerken wir, dass $s \neq 0$ und $s' \neq 0$ auch $ss' \neq 0$ impliziert.

   Sei also $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ und $\frac{t}{u} = \frac{t'}{u'}$, d.h. $r's = rs'$ und $t'u = tu'$. Dann gilt

   $$\begin{aligned}\frac{r'}{s'} + \frac{t'}{u'} = \frac{r'u' + t's'}{s'u'} &= \frac{r'u'us + t's'us}{s'u'us} \\ &= \frac{rs'u'u + tu's's}{s'u'us} = \frac{ru + ts}{su} = \frac{r}{s} + \frac{t}{u}.\end{aligned}$$

   Folglich ist die Addition wohldefiniert. Zur Multiplikation:

   $$\frac{r'}{s'} \cdot \frac{t'}{u'} = \frac{r't'}{s'u'} = \frac{r't'su}{s'u'su} = \frac{rs'tu'}{s'u'su} = \frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u}.$$

3. [1 P] Die Kommutativität der Addition folgt sofort aus der Kommutativität von R. Das neutrale Element ist $\frac{0}{1}$ und das Inverse von $\frac{r}{s}$ ist $\frac{-r}{s}$. Zur Assoziativität:

   $$\begin{aligned}\Big(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\Big) + \frac{v}{w} = \frac{ru + ts}{su} + \frac{v}{w} &= \frac{ruw + tsw + vsu}{suw} = \frac{r}{s} + \frac{tw + vu}{uw} \\ &= \frac{r}{s} + \Big(\frac{t}{u} + \frac{v}{w}\Big).\end{aligned}$$

4. [1 P] Das neutrale Element ist $\frac{1}{1}$, das Inverse von $0 \neq \frac{r}{s}$ ist $\frac{s}{r}$, die Kommutativität und die Assoziativität der Multiplikation folgen sofort aus der Kommutativität und der Assoziativität der Multiplikation in R.

5. [1 P] Wir müssen nur noch zeigen, dass die Distributivgesetze gelten. Also:

   $$\begin{aligned}\Big(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\Big) \cdot \frac{v}{w} = \frac{ru + ts}{su} \cdot \frac{v}{w} &= \frac{vru + vts}{suw} = \frac{vruw + vtsw}{suww} \\ &= \frac{rv}{sw} + \frac{tv}{uw} = \frac{r}{s} \cdot \frac{v}{w} + \frac{t}{u} \cdot \frac{v}{w}.\end{aligned}$$

   Die Gleichung $\frac{r}{s}\big(\frac{t}{u} + \frac{v}{w}\big) = \frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u} + \frac{r}{s} \cdot \frac{v}{w}$ zeigt man analog.

6. [1 P] Wir definieren $f\colon R \to \operatorname{Quot}(R)$, $r \mapsto \frac{r}{1}$. Einfaches Nachrechnen zeigt, dass f in der Tat ein Ringhomomorphismus ist. Ist $f(r) = \frac{r}{1} = 0 = \frac{0}{1}$, so ist $r = 0$, d.h. f ist injektiv.

Zu Aufgabe P2 (6 P)

1. [2 P] Es gilt

$$(a_2, a_3, \ldots) = f(a_1, a_2, \ldots) = \lambda(a_1, a_2, \ldots) \iff \lambda a_n = a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Diese Gleichung bedeutet, dass eine Folge genau dann ein Eigenvektor von f ist, wenn das jeweils nächste Folgenglied das λ-fache des vorherigen ist. Insbesondere ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Folge $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und eine Basis des ein-dimensionalen Vektorraums $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$.

2. [2 P] Es ist klar, dass $\dim W \leq 2$, denn jede Folge in W ist durch ihre ersten beiden Einträge komplett festgelegt, d.h. nur a_1 und a_2 sind "frei" wählbar. Genauer, sei $w = (a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, 2a_1 + 3a_2, \ldots) \in W$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} w &= (a_1, 0, a_1, a_1, 2a_1, 3a_1, 5a_1, \ldots) + (0, a_2, a_2, 2a_2, 3a_2, 5a_2, \ldots) \\ &= a_1 f + a_2 g, \end{aligned}$$

   wobei $f = (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ und $g = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$.

   Die gesuchten Eigenwerte sind Lösungen φ und ψ der Gleichung $\lambda^2 = \lambda + 1$ und die Eigenvektoren nach 1. $\Phi = (1, \varphi, \varphi^2, \ldots)$ und $\Psi = (1, \psi, \psi^2, \ldots)$. Weil $\varphi \neq \psi$, sind diese Vektoren linear unabhängig.

3. [2 P] Wir verwenden die vorherige Teilaufgabe. Da die Fibonacci-Folge $A = (1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ in W ist, haben wir $A = \alpha\Phi + \beta\Psi$ für irgendwelche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Betrachten wir den ersten Eintrag, so erhalten wir $1 = \alpha + \beta$, also $\beta = 1 - \alpha$. Betrachten wir den zweiten Eintrag, so gilt

$$1 = \alpha\varphi + \beta\psi = \alpha\varphi + (1 - \alpha)\psi = \psi + \alpha(\varphi - \psi),$$

   also $\alpha = \frac{1-\psi}{\varphi-\psi} = \frac{\varphi}{\varphi-\psi}$. Folglich ist $\beta = 1 - \frac{\varphi}{\varphi-\psi} = -\frac{\psi}{\varphi-\psi}$. Damit erhalten wir

$$a_n = \alpha\varphi^{n-1} + \beta\psi^{n-1} = \frac{\varphi}{\varphi - \psi}\varphi^{n-1} - \frac{\psi}{\varphi - \psi}\psi^{n-1} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}.$$

Bemerkung: Die Zahl φ ist der *goldene Schnitt.*

Zu Aufgabe P3 (2 P) Wir betrachten $U' = \operatorname{span}(I_{n\times n}, M, \ldots, M^{n-1}) \subseteq \operatorname{Mat}(n \times n, K)$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton (CH) können wir M^n

als Linearkombination der Potenzen M^i, $0 \leq i \leq n-1$ darstellen. Induktiv funktioniert dies auch für alle M^{n+i} mit $i > 0$, da

$$M^{n+i} = MM^{n+i-1} \overset{IV}{=} M(\sum_{i=0}^{n-1} a_i M^i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i M^i + M^n \overset{CH}{=} \sum_{i=1}^{n-1} a_i M^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i M^i.$$

Folglich enthält U' alle nicht-negativen Potenzen von M. Ist $\dim_K U' < n$, so ergänze eine Basis von U' zu einer n-elementigen linear unabhängigen Teilmenge in $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und nehme den davon erzeugten Unterraum U.

Zu Aufgabe P4 (5 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. [1 P] Es existieren $K, L \in \mathbb{N}$ mit $f^K = g^L = 0$. Dann gilt (da f und g kommutieren):

$$\begin{aligned}(f+g)^{K+L} &= \sum_{i=0}^{K+L} \binom{K+L}{i} f^i g^{K+L-i} \\ &= \sum_{i=0}^{K-1} \binom{K+L}{i} f^i g^{K+L-i} + \sum_{i=K}^{K+L} \binom{K+L}{i} f^i g^{K+L-i} \\ &= 0,\end{aligned}$$

da $K + L - i > L$ wenn $i < K$.

2. [2 P]

$$\begin{aligned}\exp(f)\exp(g) &= \big(\sum_{i=0}^{K} \frac{1}{i!} f^i\big)\big(\sum_{j=0}^{L} \frac{1}{j!} g^j\big) \overset{(*)}{=} \sum_{i+j=0}^{K+L} \frac{1}{i!j!} f^i g^j \\ &= \mathrm{I}_{n\times n} + f + g + \sum_{s=0}^{2} \frac{1}{s!(2-s)!} f^s g^{2-s} + \ldots \\ &+ \sum_{s=0}^{K+L} \frac{1}{s!(K+L-s)!} f^s g^{K+L-s} \\ &\overset{(\diamond)}{=} \sum_{m=0}^{K+L} \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} f^s g^{m-s} = \sum_{m=0}^{K+L} \frac{1}{m!} (f+g)^m = \\ &= \exp(f+g),\end{aligned}$$

wo wir bei $(*)$ benutzt haben, dass $AB = BA$, also auch $A^k B^k = (AB)^k$ für $k \in \mathbb{N}$, und bei $(\diamond)$ die Gleichung $\binom{m}{s} = \frac{m!}{s!(m-s)!}$.

3. [2 P] Wir betrachten die reellen Matrizen $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beide sind nilpotent, da $f^2 = g^2 = 0$. Zudem ist $(f+g)^3 = 0$.

Es ist $\exp(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\exp(f+g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zu Aufgabe P5 (4 P)
[2 P] „1.$\Longrightarrow$2.“ Wir betrachten die Matrix von f bezüglich der geordneten Basis

$$(f^{n-1}(v), \dots, f(v), v)$$

und stellen schnell fest, dass diese eine obere Dreiecksmatrix ist, deren einzige Nicht-Null-Einträge Einsen auf der Nebendiagonale sind. Damit hat diese Matrix Rang $n-1$ und die Behauptung folgt.

[2 P] „2.$\Longrightarrow$1.“ Da f nilpotent ist, können wir oBdA annehmen, dass die Matrixdarstellung von f eine obere Dreiecksmatrix ist mit Nullen auf der Diagonale. Da der Rang dieser Matrix $n-1$ ist, sind die Nebendiagonaleinträge alle ungleich Null und es folgt mit Rechnen auch, dass $\dim_K \ker f^i = i$ für $1 \leq i \leq n-1$. Insbesondere existiert ein $v \in V$ mit $f^{n-1}(v) \neq 0$, so dass auch $f^i(v) \neq 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ gelten muss.
Wir bemerken noch, dass die Menge $\{f^{n-1}(v), \dots, f(v), v\}$ tatsächlich n paarweise verschiedene Elemente beinhaltet, denn wäre $f^i(v) = f^k(v)$ für $i < k$ (also $n-k+i < n$), dann hätten wir

$$0 = f^n(v) = f^{n-k} f^k(v) = f^{n-k} f^i(v) = f^{n-k+i}(v) \neq 0,$$

also einen Widerspruch.
Sei nun $a_{n-1} f^{n-1}(v) + \ldots + a_0 v = 0$. Anwenden von f^{n-1} ergibt dann die Gleichung $a_0 f^{n-1}(v) = 0$, also ist $a_0 = 0$. Folglich betrachten wir die Gleichung $a_{n-1} f^{n-1}(v) + \ldots + a_1 f(v) = 0$. Anwenden von f^{n-2} auf diese Gleichung liefert dann, dass $a_1 = 0$. Induktiv ergibt sich $a_i = 0$ für alle $0 \leq i \leq n-1$, d.h. die n-elementige Teilmenge $\{v, \dots, f^{n-1}(v)\}$ von V ist linear unabhängig, und damit eine Basis.