Lösungshinweise zu Blatt # 12
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

1. Nach 6.2, Bemerkung 3 ist $\mathrm{Bil}(K^n) \cong \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Also erhalten wir $\dim_K \mathrm{Bil}(K^n) = n^2$.

2. Dies folgt aus den Identitäten $\beta(iu, v) \overset{sym.}{=} \beta(v, iu) \overset{ses.}{=} i\beta(v, u) \overset{sym.}{=} i\beta(u, v) \overset{ses.}{=} -\beta(iu, v)$.

3. Falls $\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in V$, folgt $\beta(u, v) = -\beta(v, u) \overset{\mathrm{char}(K)=2}{=} \beta(v, u)$. Also muss $M_{ij} = M_{ji}$ gelten. Sei $v_i \in \mathcal{B}$. Wegen $\beta(v_i, v_i) = 0$ gilt $M_{ii} = 0$. Die umgekehrte Richtung folgt analog.

4. Seien $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Nach 2.7, Bemerkung 4 gilt $b_j = \sum_{l=1}^{n} T_{l,j} a_l$. Damit folgt
$$\beta(b_i, b_j) = \sum_{k,l=1}^{n} \beta(T_{k,i} a_k, T_{l,j} a_l) = \sum_{k,l=1}^{n} \overline{T}_{k,i} M_{k,l} T_{l,j}.$$

Zu Aufgabe 62 (3 P)

1. [1P] Seien $v_i, v_j \in \mathcal{B}$. Nach 6.2, Bemerkung 3 ist dann $M_{i,j} = \beta(v_i, v_j) = \beta(v_j, v_i) = M_{j,i}$.

2. [2P] $\Leftarrow$: Sei $\dim_K V = n$ und $a \in K^n$, so dass $a^T M b = 0$ für alle $b \in K^n$. Angenommen $a \neq 0$, also $a_i \neq 0$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da M vollen Rang hat und damit insbesondere bijektiv ist, gibt es ein $b \in K^n$ mit $Mb = e_i$. Dann folgt aber $a^T M b = a^T e_i = a_i \neq 0$. Da $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M^T)$ folgt $(\forall b \in K^n : b^T M a = 0) \Rightarrow (a = 0)$ aus $a^T M^T b = b^T M a$ und der Argumentation von oben. [1 P]

   $\Rightarrow$: Wegen $(\forall b \in K^n : b^T M a = 0) \Rightarrow (a = 0)$ ist klar, dass M injektiv ist. Weil M eine $n \times n$ Matrix ist, folgt daraus, dass sie vollen Rang hat. [1 P]

Zu Aufgabe 63 (2 P)

Sei M die darstellende Matrix von β bezüglich irgendeiner Basis in V. Nach 6.2, Lemma 5 ist $M = -M^T$ und β nicht-entartet genau dann, wenn $\det M \neq 0$. [1 P] Aus $\det M = \det(-M^T) = (-1)^{\dim V} \det M$ folgt dann die Aussage. [1 P]

Zu Aufgabe 64 (3 P)
Definiere $\tilde{\beta}\colon V/V^\perp \times V/V^\perp \to \mathbb{K}$, so dass $\tilde{\beta}([v],[w]) = \beta(v,w)$ für alle $v, w \in V$ gilt. Diese Definition ist von der Wahl des speziellen Repräsentanten unabhängig, denn für $u, v \in V$ und $r, s \in V^\perp$ gilt

$$\beta(u+r, v+s) = \beta(u,v) + \beta(r,v) + \beta(u,s) + \beta(r,s) = \beta(u,v). \quad [1 \text{ P}]$$

Sei $0 = \tilde{\beta}([v],[v]) = \beta(v,v)$. Mit 6.3, Satz 11 (Cauchy-Schwarz) gilt für alle $w \in V$

$$|\beta(v,w)|^2 \le \beta(v,v)\beta(w,w) = 0 \implies v \in V^\perp \implies [v] = 0.$$

Damit folgt, dass $\tilde{\beta}$ positiv definit ist. [1 P]
Wir müssen also noch zeigen, dass $\tilde{\beta}$ bilinear ist. Dies folgt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aus

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}([v] + \lambda[u], [w]) &= \tilde{\beta}([v+\lambda u], [w]) = \beta(v + \lambda u, w) = \beta(v,w) + \lambda\beta(u,w) \\ &= \tilde{\beta}([v],[w]) + \lambda\tilde{\beta}([u],[w])\end{aligned}$$

und den analogen Identitäten im 2. Argument und dem Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. [1 P]

Zu Aufgabe 65 (4 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

β lässt sich mit Hilfe von Matrizen auch wie folgt angeben:

$$\beta\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = (x_1,x_2,x_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Nach 6.2, Bemerkung 3 und Lemma 5 ist β bilinear und symmetrisch. [1 P]
Da

$$|3| > 0, \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

folgt nach 6.3, Satz 12, dass β positiv definit ist und damit ein Skalarprodukt darstellt. [1 P]
Eine orthonormierte Basis $\{a_1, a_2, a_3\}$ erhält man mit dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren wie folgt:

$$a_1 := \frac{1}{\sqrt{\beta(e_1,e_1)}} \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von

$$\tilde{a}_2 := e_2 - \beta(e_2, a_1) \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$a_2 := \frac{1}{\sqrt{\beta(\tilde{a}_2, \tilde{a}_2)}} \cdot \tilde{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\tilde{a}_3 := e_3 - \beta(e_3, a_1) \cdot a_1 - \beta(e_3, a_2) \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt dann

$$a_3 := \frac{1}{\sqrt{\beta(\tilde{a}_3, \tilde{a}_3)}} \cdot \tilde{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad [2P]$$

Zu Aufgabe 66 (3 P)

Beachte, dass für ein Skalarprodukt β auf einem unitären Vektorraum wegen $\beta(u,v) = \overline{\beta(v,u)}$ die Identität $\beta(u,v) + \beta(v,u) = 2\mathrm{Re}(\beta(u,v))$ gilt. [1 P] Damit folgt

$$\beta_1(u+v, u+v) = \beta_1(u,u) + \overbrace{\beta_1(u,v) + \beta_1(v,u)}^{2\mathrm{Re}(\beta_1(u,v))} + \beta_1(v,v)$$
$$\beta_2(u+v, u+v) = \beta_1(u,u) + \overbrace{\beta_2(u,v) + \beta_2(v,u)}^{2\mathrm{Re}(\beta_2(u,v))} + \beta_1(v,v),$$

also $\mathrm{Re}(\beta_1(u,v)) = \mathrm{Re}(\beta_2(u,v))$. [1 P]
Indem man u mit iu ersetzt, zeigt man analog, dass $\mathrm{Im}(\beta_1(u,v)) = \mathrm{Im}(\beta_2(u,v))$ gilt. [1 P]

Zu Aufgabe 67 (3 P)

Sei zunächst $\beta(x,y) := \overline{x}^T A y$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$. Nach 6.2, Bemerkung 8.1 gibt es eine Basis $\mathcal{B}$, so dass $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{ses}}(\beta)$. Weiter folgt nach 6.3, Satz 8 (Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren), dass eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ existiert mit $I_{n\times n} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{ses}}(\beta)$. Nach 6.2, Bemerkung 8.2 gibt es daher eine Transformationsmatrix S, so dass $A = S^{\mathrm{ad}} S$ gilt. [2 P]
Gilt umgekehrt $A = S^{\mathrm{ad}} S$ für eine invertierbare Matrix S, dann ist $\beta(x,y) := \overline{x}^T A y = \overline{x}^T S^{\mathrm{ad}} S y = \overline{Sx}^T S y$ ein Skalarprodukt, wie man leicht nachprüfen kann. [1 P]

Zu Aufgabe 68 (3 P)

Sei m_h das Minimalpolynom von h. Ist $\deg(h) = 1$, dann gilt $m_h(h) = h - \mu\,\mathrm{id} = 0$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$. Angenommen nun $\deg(h) > 1$. Dann zerfällt m_h nach 4.4, Korollar 12 in Linearfaktoren. Also gibt es $p \in \mathbb{C}[X]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $m_h = (X - \lambda) \cdot p$. Es folgt $m_h(h) = (h - \lambda\,\mathrm{id}) \cdot p(h) = 0$. Da $\deg p < \deg m_h$, ist $p(h) \neq 0$. Folglich gilt $\{0\} \neq \mathrm{im}\,(p(h)) \subset \ker\,(h - \lambda\,\mathrm{id}) =: W$. Da $\deg(m_h) > 1$, ist $h - \lambda\,\mathrm{id} \neq 0$, also $W \neq V$. Wegen $f\left((h - \lambda\,\mathrm{id})(W)\right) = 0 = (h - \lambda\,\mathrm{id})\,(f(W))$ ist $f(W) \subset W$, d.h. wir haben einen Widerspruch.

Alternative:

Da das Charakteristische Polynom von h Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt, hat h einen Eigenwert μ. Wegen $h(f(v)) = f(h(v)) = \mu f(v)$ für alle $v \in \mathrm{Eig}(h, \mu)$ ist dessen Eigenraum f-invariant. Ferner gilt $\dim \mathrm{Eig}(h, \mu) \geq 1$, daher muss $\mathrm{Eig}(h, \mu) = V$ sein. Wir können also $\lambda = \mu$ wählen.