Lösungshinweise zum Übungsblatt # 10
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

1. Nein, denn die 2×2-Einheitsmatrix ist eine Blockdiagonalmatrix mit Minimalpolynom $X - 1 \neq (X-1)^2$.

2. Sei a_i der führende Koeffizient von d_i, $i = 1, ..., n$. Dann folgt die Aussage des Satzes mit $U = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, ..., a_n^{-1})T$ und $V = W$.

3. Dazu benutzt man Satz 5.4.10 3): „ $\Rightarrow$ “ folgt direkt aus $m_A \mid p_A$ und ebenso folgt „ $\Leftarrow$ “ aus $p_A \mid m_A^n$.

4. In der K-Vektorraumbasis $[(X-\lambda)^{n-1}], [(X-\lambda)^{n-2}], ..., [(X-\lambda)^0]$ (vgl. Zettel 7 Aufg. 35) wirkt X als $J(n, \lambda)$, denn $X(X-\lambda)^j = (X-\lambda)^{j+1} + \lambda(X-\lambda)^j$ für $j \in \mathbb{N}$ und insbesondere $[X(X-\lambda)^{n-1}] = [(X-\lambda)^n + \lambda(X-\lambda)^{n-1}] = [\lambda(X-\lambda)^{n-1}]$.

Zu Aufgabe 50 (4 P) Mit dem Algorithmus aus Satz 5.4.5 ergeben sich für die charakteristischen Matrizen in beiden Fällen die Invariantenteiler 1, $(X-4)$ und $(X-4)^2$ (Alternativ können die Invariantenteiler über das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom bestimmt werden). Damit sind die Matrizen ähnlich nach Satz 5.4.9.

Zu Aufgabe 51 (2 P) Die Invariantenteiler der charakteristischen Matrix vom Grad ≥ 1 sind $(X-4)$ und $(X-4)^2 = X^2 - 8X + 16$ (siehe Aufg. 49). Damit ist die Frobenius-Normalform gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

[1P] und die Jordan-Normalform ist gegeben durch Jordan-Blöcke $J(1,4)$ und $J(2,4)$ [1 P]:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 52 (4 P)

1. Der $K[X]$-Modulisomorphismus
$$(K^n, J(n,\lambda)) \simeq K[X]/\langle (X-\lambda)^n \rangle$$
(vgl. kurze Fragen bzw. Lemma 5.4.15) impliziert für die Invariantenteiler der charakteristischen Matrix: $c_i = 1$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $c_n = (X-\lambda)^n$ (vgl. Bew. zu Satz 5.4.14) über die Frobenius-Normalform. Damit ist das charakteristische Polynom von $J(n,\lambda)$ gleich $(\lambda - X)^n$ und also bis auf Vorzeichen gleich dem Minimalpolynom von $J(n,\lambda)$, welches durch $c_n = (X-\lambda)^n$ gegeben ist (vgl. Satz 5.4.10) [2 P].

2. Man sieht einfach, dass der Eigenraum zum einzigen Eigenwert λ von Dimension 1 mit Basis e_1 ist [1 P].

3. Da das charakteristische Polynom nach 1. in Linearfaktoren zerfällt, gibt es eine Hauptraumzerlegung und es gilt $K^n = \mathrm{Hau}(J(n,\lambda), \lambda)$ (vgl. Satz 4.4.18). Da $(J(n,\lambda) - \lambda I_{n\times n})^n = 0$ ist es auch einfach direkt zu sehen, dass dies gilt [1 P].

Zu Aufgabe 53 (3 P) Wie im Beweis von Satz 5.4.14 (Frobenius-Normalform) haben wir einen $K[X]$-Modulisomorphismus
$$\gamma : (K^n, A) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{n} K[X]/\langle c_i \rangle,$$
wobei c_i die Invariantenteiler von M_A sind. Nun ist das Minimalpolynom der Erzeuger des Ideals
$$I = \{p \in K[X] \mid p \cdot v = 0 \text{ für alle } v \in K^n\}.$$
Mit dem Modulisomorphismus folgt $I = \bigcap_{i=1}^n \langle c_i \rangle$, denn die Bedingung $p \cdot v = 0$ für alle $v \in K^n$ ist dann gleichbedeutend zu $p \cdot [q] = 0$ für alle $[q] \in K[X]/\langle c_i \rangle$ und alle $i = 1, ..., n$. Da aber $c_i \mid c_{i+1}$, gilt $\bigcap_{i=1}^n \langle c_i \rangle = \langle c_n \rangle$ wie gewünscht.

Zu Aufgabe 54 (3 P) Wir definieren zunächst Abbildungen in beiden Richtungen. Sei dazu $\varphi : R \times M \to M$ eine Modulstruktur auf M. Dann definiert $\varphi(r,-) : M \to M$, $m \mapsto \varphi(r,m)$, für jedes $r \in R$ einen Gruppenhomomorphismus also $\varphi(r,-) \in \mathrm{End}(M)$. Für $r, r' \in R$ und $m \in M$ folgt aus den Modulaxiomen, dass $\varphi(r,m) + \varphi(r',m) = \varphi(r+r',m)$ und damit $\varphi(r,-) + \varphi(r',-) = \varphi(r+r',-)$. Genauso zeigt man $\varphi(r,-)\varphi(r',-) = \varphi(rr',-)$ und $\varphi(1,-) = 1$ (der Identitätsgruppenhomomorphismus). Damit definiert $r \mapsto \varphi(r,-)$ in der Tat einen Ringhomomorphismus [1 P]. Sei umgekehrt $F : R \to \mathrm{End}(M)$ ein Ringhomomorphismus. Dann definieren wir $r \cdot m := F(r)(m)$ und prüfen, dass dies tatsächlich eine R-Modulstruktur auf M definiert [1 P]. Offensichtlich sind diese Abbildungen invers zueinander, denn $r \cdot m = \varphi(r,-)(m) = \varphi(r,m)$ gibt wieder die ursprüngliche Modulstruktur und $(r \cdot -)(m) = r \cdot m = F(r)(m)$ gibt wieder den ursprünglichen Ringhomomorphismus [1 P].

Zu Aufgabe 55 (4 P)
(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h., in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)
Die Äquivalenzklassen können über die Frobenius-Normalform klassifiziert werden vgl. Satz 5.4.14. Wir machen dazu eine Fallunterscheidung über den Grad von $c_n = m_A$.

1. $\deg(c_4) = 4$ also $m_A = P_A$. D.h. $c_1, c_2, c_3 = 1$ und $c_4 = X^4 + b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0$ mit $b_0, ..., b_3 \in \mathbb{F}_3$. Es gibt $3^4 = 81$ solcher Polynome und die Frobenius-Normalform und damit der gesuchte Repräsentant ist gegeben durch:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -b_3 \end{pmatrix}.$$

2. $\deg(c_4) = 3$. D.h. $c_1, c_2 = 1$, $\deg(c_3) = 1$ und $c_3|c_4$. Damit ist $c_3 = X + b_0'$ und $c_4 = (X + b_0')(X^2 + b_1X + b_0)$ mit $b_0', b_0, b_1 \in \mathbb{F}_3$. Es gibt 27 solcher Polynome und die zugehörige Frobenius-Normalform ist
$$\begin{pmatrix} -b_0' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_0'b_0 \\ 0 & 1 & 0 & -(b_0 + b_0'b_1) \\ 0 & 0 & 1 & -(b_1 + b_0') \end{pmatrix}.$$

3. $\deg(c_4) = 2$. Es treten wiederum zwei Fälle auf:

   (a) $c_1, c_2 = 1$ und $\deg(c_3) = 2$, d.h. $c_3 = c_4$, also haben diese die Form $X^2 + b_1X + b_0$ mit $b_0, b_1 \in \mathbb{F}_3$. Es gibt 9 solcher Polynome und die zugehörige Frobenius-Normalform ist
$$\begin{pmatrix} 0 & -b_0 & 0 & 0 \\ 1 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 0 & 0 & 1 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

   (b) $c_1 = 1$ und $\deg(c_2) = 1 = \deg(c_3)$, d.h. $c_2 = c_3$ mit $c_2|c_4$, also haben diese die Form $c_2 = c_3 = X + b_0'$ und $c_4 = (X + b_0')(X + b_0)$. Es gibt 9 solcher Polynome und die zugehörige Frobenius-Normalform ist
$$\begin{pmatrix} -b_0' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_0' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_0'b_0 \\ 0 & 0 & 1 & -(b_0 + b_0') \end{pmatrix}.$$

4. $\deg(c_4) = 1$. In diesem Fall gilt analog $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ und dies ist ein Polynom der Form $X + b_0$ mit $b_0 \in \mathbb{F}_3$. Es gibt 3 solcher Polynome und die zugehörige Frobenius-Normalform ist

$$\begin{pmatrix} -b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_0 \end{pmatrix}.$$

   Insgesamt gibt es also $81 + 27 + 9 + 9 + 3 = 129$ Äquivalenzklassen.

   Anmerkung: Da $\mathbb{F}_3$ nicht algebraisch abgeschlossen ist, kann hier nicht mit der Jordan-Normalform argumentiert werden.