Lösungshinweise zu Blatt # 8
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

1. Sei $u \in R^*$, so dass $abu = 1$. Dann ist aber bu invers zu a und au invers zu b.

2. Sei $V = \operatorname{span}_K(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Betrachte in $\operatorname{End}_K(V)$ die Abbildungen
$$R\colon e_i \mapsto e_{i+1} \quad \text{und} \quad L\colon e_i \mapsto \begin{cases} e_{i-1} & i > 1 \\ 0 & i = 1. \end{cases}$$
Dann ist $LR = \mathrm{id}_V$, aber $\ker L \neq \{0\}$ und damit ist L keine Einheit in $\operatorname{End}_K(V)$.

3. In beiden Fällen kann man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Kette $2^n\mathbb{Z} \subset 2^{n-1}\mathbb{Z} \subset \ldots \subset \mathbb{Z}$ wählen.

4. Die Abbildung $R \to \langle a\rangle, r \mapsto ra$ ist ein surjektiver R-Modulhomomorphismus. Da R nullteilerfrei ist, ist sie auch injektiv.

Zu Aufgabe 38 (4 P)

1. [1] Dies ist eine einfache Folgerung aus 5.2, Lemma 7.

2. [2] Nach Blatt 7, Aufgabe 35 gilt $\dim_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2[X]/\langle X^2+X+1\rangle) = \deg(X^2+X+1) = 2$. Für einen d-dimensionalen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum V gilt $|V| = 2^d$. Das Polynom X^2+X+1 besitzt in $\mathbb{F}_2$ keine Nullstelle und ist deshalb nach Blatt 7, Aufgabe 36 irreduzibel. Aus 1. folgt, dass $\langle X^2+X+1\rangle$ maximal ist und nach Blatt 6, Aufgabe 32 ist damit $\mathbb{F}_2[X]/\langle X^2+X+1\rangle$ ein Körper. (Oder man argumentiert, dass jedes Element ein Inverses besitzt (siehe 3.), und es sich deshalb um einen Körper handelt.)

3. [1] Die Menge $\mathbb{F}_2[X]/\langle X^2+X+1\rangle$ entspricht den Resten von Polynomen in $\mathbb{F}_2$ bei Division mit X^2+X+1. Sie ist gegeben durch $\{0, 1, x, x+1\}$, wobei wir zur besseren Unterscheidung mit x die Variable im Quotientenkörper bezeichnen. Daher folgt aus $X^2 = (X^2+X+1) + (X+1)$ die Identität $xx = x+1$.

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Zu Aufgabe 39 (3 P)

(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

$1 \Rightarrow 2$:
Nach Voraussetzung gibt es für jedes Paar $r, s \in K[X]$ ein $t \in K[X]$ (und umgekehrt), so dass $rp + sq = tg$ gilt. Setzt man $r = 1 \wedge s = 0$, so sieht man $g|p$. Analog zeigt man $g|q$. Sei nun $h \in K[X]$ ein weiteres Polynom, das p und q teilt. Dann gibt es $x, y \in K[X]$ mit $p = xh$ und $q = yh$. Fur $t = 1$ erhalten wir also $g = rp + sq = rxh + syh = (rx + sy)h$, d.h. $h|g$.

$2 \Rightarrow 3$:
Sei h ein Teiler von p und q. Nach Voraussetzung gibt es ein $t \in K[x]$, so dass $g = th$. Dann ist $\deg(g) = \deg(t) + \deg(h) \geq \deg(h)$.

$3 \Rightarrow 1$:
Da $K[X]$ ein Hauptidealring ist und $\langle p\rangle + \langle q\rangle$ ein Ideal, gibt es ein $c \in K[X]$, so dass $\langle c\rangle = \langle p\rangle + \langle q\rangle$ gilt. Dann teilt c auch p und q. Weil g ein Teiler von p und q ist, gilt $\langle p\rangle + \langle q\rangle \subset \langle g\rangle$. Also gibt es ein $t \in K[X]$ mit $c = tg$. Weil p und q nicht beide 0 sind, ist $t \neq 0$. Es folgt $\deg(t) + \deg(g) = \deg(c) \leq \deg(g)$. Weil p und q nicht beide 0 sind, ist $c \neq 0$ und deshalb $\deg(t) = 0$. Also ist t eine Einheit und deshalb $\langle g\rangle \subset \langle p\rangle + \langle q\rangle$.

Zu Aufgabe 40 (3 P)

1. [1] „$\geq$“

   Sei $\{0\} = A_0 \subsetneq \ldots \subsetneq A_m$ eine Kette in A und $\{0\} = C_0 \subsetneq \ldots \subsetneq C_n$ eine Kette in C. Dann definiere die Kette

   $$\begin{aligned}\{0\} = i(A_0) \subsetneq i(A_1) \subsetneq \ldots \subsetneq i(A_m) &= \mathrm{im}(i) \\ &= \ker(\pi) = \pi^{-1}(C_0) \subsetneq \pi^{-1}(C_1) \ldots \subsetneq \pi^{-1}(C_n) = B.\end{aligned}$$

   „$\leq$“

   Sei $\{0\} = B_0 \subsetneq \ldots \subsetneq B_k$ eine Kette von Untermoduln in B. Setze $C_i = \pi(B_i)$ und $A_i = i^{-1}(B_i)$. Man kann nun ganz analog zu 5.3, Satz 4 die Aussage zeigen.

2. [2] Wir zeigen, dass $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ als additive Gruppe nicht isomorph ist zu $\mathbb{Z}_4$: Angenommen, es gebe solch einen Isomorphismus. Dann müsste jedes selbstinverse Element wieder auf ein selbstinverses Element abgebildet werden. In $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sind aber alle 4 Elemente selbstinvers, in $\mathbb{Z}_4$ jedoch nur [0] und [2].

Zu Aufgabe 41 (2 P)

1. [1] Seien $p, q \in R[X]^*$, so dass $pq = 1$ gilt. Wegen 4.2, Lemma 8 wissen wir, dass $\deg(p) + \deg(q) = 0$ gelten muss. Damit folgt $p, q \in R^*$.

2. [1] Seien p, q normierte, assoziierte Polynome. Letzteres heißt, dass $r, s \in R[X]$ existieren mit $p = rq$ und $q = sp$. Dann folgt $p = rsp$ und wegen der Eindeutigkeit der Division mit Rest (oder auch direkt aus der Nullteilerfreiheit von $R[X]$) erhalten wir $rs = 1$. Nach 1. sind $r, s \in R^*$ und weil p, q normiert sind, gilt sogar $r = s = 1$.

Zu Aufgabe 42 (2 P)

1. Mit jeder Basis kann man eine (vollständige) Fahne konstruieren, also folgt $l_K(V) \geq \dim_K(V)$. Da aber ein echter Untervektorraum mindestens eine Dimension niedriger sein muss, kann es keine Kette mit mehr als $\dim_K(V)$ Gliedern geben.

2. Hier argumentiert man völlig analog.

Zu Aufgabe 43 (2 P)

Da $\mathbb{R}[X]$ ein Hauptidealring ist, stimmen die Primelemente und die irreduziblen Elemente überein. Mithilfe von Blatt 7, Aufgabe 36 rechnet man leicht nach, dass $(X^2+1)(X^2+4)(X+1)$ eine Zerlegung in irreduzible Faktoren darstellt.

Zu Aufgabe 44 (3 P)

1. Da M nilpotent ist, gilt nach Blatt 6, Aufgabe 31 $P_M = (-1)^n X^n$. Zusammen mit (4.3, Lemma 3)

   $$P_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(M) X^{n-1} + \ldots + \det(M) I_{n \times n}. \tag{1}$$

   erhalten wir $\operatorname{tr}(M) = 0$. Weil auch M^k für jedes $k \geq 2$ nilpotent ist, können wir obiges Argument für diese Fälle wiederholen.

2. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton (4.3, Satz 11) ist $P_M(M) = 0$. Also M eingesetzt in (1) und die Spur darauf angewandt, ergibt $\det(M) = 0$. Hier haben wir $\operatorname{char}(K) = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(I_n) \neq 0$ verwendet. Dies zeigt, dass es einen Vektor $v_0 \neq 0$ im Kern von M gibt. Diesen erweitern wir zu einer Basis von K^n. Damit ist M ähnlich zu einer Matrix N_0, deren erste Spalte der Nullvektor ist: (Betrachte die darstellende Matrix von M bezüglich dieser Basis.)

   $$M \sim N_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline \vdots & N_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

   Für N_0 gilt ebenfalls $\operatorname{tr}(N_0^k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$ (Blatt 2, Aufgabe 7 impliziert $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(S^{-1}AS)$). Weil der Matrixeintrag an der (1,1)-Stelle von

N_0^k für jedes $k > 0$ wieder 0 ist, gilt insbesondere $\mathrm{tr}(N_1^k) = \mathrm{tr}(N_0^k) = 0$. Ist $n = 2$, dann sind alle Diagonalelemente von N_0 0 und aus Blatt 6, Aufgabe 37 folgt, dass N_0 nilpotent ist. Wegen $(T^{-1}MT)^k = T^{-1}M^kT$ ist dann auch M nilpotent. Für $n > 2$ folgt mir der selben Argumentation wie oben, dass ein $0 \neq v_1 \in K^{n-1}$ existiert mit $N_1v_1 = 0$. Wir wählen nun ein $a \in K$, so dass die Vektoren v_0 und $\begin{pmatrix} a \\ v_1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind und erweitern diese zu einer Basis von K^n. Dann ist M ähnlich zu einer Matrix, deren oberer linker 3×3 Block obere Dreiecksmatrixgestalt hat. Wir setzten dieses Verfahren fort, bis wir eine obere Dreiecksmatrix erhalten, deren Diagonalelemente alle 0 sind.