Lösungshinweise zum Übungsblatt # 6
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

1. Sind U und U' M-invariant und $v \in U \cap U'$, so ist $M(v) \in M(U) \subseteq U$ und $M(v) \in M(U') \subseteq U'$, also $M(v) \in U \cap U'$.

2. Das Erzeugendensystem unseres Unterraums ist M-invariant, da $M^2 = -\mathrm{Id}_{4\times 4}$.

3. Wir erhalten eine Fahne z.B. wie folgt:
$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_1 \oplus W_1 \subsetneq V_2 \oplus W_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n \oplus W_m = V \oplus W.$$

4. Sei $0 \neq x \in I$. Dann ist x eine Einheit, also ist $xx^{-1} = 1 \in I$, also ist $I = K$.

Zu Aufgabe 28 (5 P) [1 P] Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom von M, also

$$P_M(X) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ -2 & -X & 1 \\ 2 & 1 & -X \end{pmatrix} = \ldots = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = -(X-1)^3.$$

[1 P] Es ist leicht zu sehen, dass $(1,-1,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, so dass wir also die Matrix $S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ betrachten.

[1 P] Ihre Inverse ist $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Im ersten Schritt erhalten wir also

$$M' = S_1 M S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[1 P] Nun betrachten wir die 2×2-Matrix unten rechts und sehen recht schnell, dass $(1,-1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Folglich betrachten wir nun die Matrix $S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 P] Ihre Inverse ist $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und es gilt

$$S_2 M S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. S_2^{-1} enthält spaltenweise die Basisvektoren bezüglich welcher M obere Dreiecksgestalt hat.
Bemerkung: Mit geschickter Wahl von S_1^{-1} lässt sich die Rechnung auch verkürzen, so dass schon nach dem ersten Schritt eine obere Dreiecksmatrix entsteht.

Zu Aufgabe 29 (3 P) [1 P] Es gilt $P_M = (1-X)^3(-1-X)$.
[1 P] Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist ein-dimensional und ist auch gleichzeitig der Hauptraum zu diesem Eigenwert. Der Gauß-Algorithmus liefert z.B. den Vektor $(0, -2, 3, 2)$ als Erzeuger.
[1 P] Man sieht recht leicht, dass der Rang von $M - \mathrm{Id}_{4\times 4} = 3$ ist, womit der Eigenraum zum Eigenwert 1 ein-dimensional ist. Der Hauptraum ist hingegen drei-dimensional und hier der Kern der Matrix $(M - \mathrm{Id}_{4\times 4})^3$ (da der Rang von $(M - \mathrm{Id}_{4\times 4})^2 = 2$ ist). Dieser Kern ist $\mathrm{span}(e_1, e_2, e_3)$.

Zu Aufgabe 30 (2 P)

1. [1 P] Ist $w \in U^\perp$, dann gilt für alle $u \in U$:

$$(u, Mw) = (M^{-1}u, w) = (u', w) = 0,$$

da $M^{-1}u = u' \in U$ (denn M schränkt sich zu einem Endomorphismus von U ein, der injektiv bleibt, folglich ein Isomorphismus ist; alternativ wähle man eine Basis von U und eine von $U^\perp$ und argumentiere mit der Matrixdarstellung bzgl. dieser Basen). Damit ist $U^\perp$ ebenfalls M-invariant.

2. [1 P] Zunächst einmal bemerken wir, dass M orthogonal ist. Hätte M einen drei-dimensionalen invarianten Unterraum, so wäre auch das eindimensionale Komplement invariant. Damit hätte M aber einen Eigenvektor zu einem reellen Eigenwert, was unmöglich ist, da das charakteristische Polynom $P_M = (X^2+1)^2$ keine reellen Nullstellen hat.

Zu Aufgabe 31 (7 P)

1. [1 P] Sei v ein Eigenvektor zu einem Eigenwert λ von f. Dann gilt $0 = f^k(v) = \lambda^k(v)$, also ist $\lambda^k = 0$, und damit $\lambda = 0$.

2. [2 P] a)$\Rightarrow$b): Es existiert ein Eigenvektor v_1 zum Eigenwert 0, da M nicht invertierbar ist. Ergänze zu einer geordneten Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Bezüglich dieser Basis, d.h. wenn man TMT^{-1} betrachtet, erhalten wir eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & (*) \\ 0 & M' \end{pmatrix}$, wobei $M' \in \mathrm{Mat}((n-1) \times (n-1), K)$ auch nilpotent ist und $(*) \in \mathrm{Mat}(1 \times (n-1), K)$. Induktion über n liefert die Behauptung (Achtung: Triagonalisierung ist bei dieser Aufgabe als Argument nur zulässig, wenn man beweist, dass das charakteristische Polynom auch wirklich in Linearfaktoren zerfällt.).

[2 P] b)$\Rightarrow$a): Sei $TMT^{-1} = M'$ eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonale. Dann ist $P_{M'} = (-1)^n X^n$ und nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $(M')^n = 0$. Folglich ist auch M nilpotent.

3. [2 P] Nach 2. ist jede nilpotente 2×2-Matrix ähnlich zu einer Matrix der Form $M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mit $\lambda \in K$. Ist $\lambda \neq 0$, so ist $SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Damit gibt es im 2×2-Fall bis auf Ähnlichkeit nur zwei Möglichkeiten, nämlich die Nullmatrix und die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dies sind auch die Repräsentanten der zwei Äquivalenzklassen.

Zu Aufgabe 32 (3 P)

1. [1 P] Hat R/I Nullteiler, so gibt es Elemente $x, y \in R$ so, dass $\overline{x} \neq 0$, $\overline{y} \neq 0$, aber $\overline{xy} = 0$ in R/I, was per Definition bedeutet, dass $xy \in I$, aber $x \notin I$ und $y \notin I$. Damit ist I nicht prim.

   Ist I nicht prim, so gibt es $a \notin I$, $b \notin I$ mit $ab \in I$. Die Restklassen von a und b in R/I sind dann Nullteiler.

2. [1 P] Sei $0 \neq x \in R$ und betrachte die Menge $I = \{rx \mid r \in R\}$, welche offensichtlich ein Ideal in R ist und $I \neq 0$, da $1x \in I$. Damit ist $I = R$, also existiert r mit $rx = 1$, d.h. x ist eine Einheit.

3. [1 P] Ist I maximal, so hat $\{0\} \neq R/I$ nur die trivialen Ideale (ein nichttriviales Ideal würde einem Ideal in R entsprechen, das I enthält und nicht R ist, was der Maximalität widerspricht) und ist damit ein Körper nach der vorherigen Teilaufgabe.

   Umgekehrt sei $R/I = K$ ein Körper. Jedes Ideal J mit $I \subseteq J \subsetneq R$ gibt das Ideal J/I in K. Nach Annahme ist $J/I = 0$, also $I = J$.