Lösungshinweise zum Übungsblatt # 5
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

1. Nein, denn zum Beispiel hat $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nur 1 als Eigenwert, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat ± 1 als Eigenwerte, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat ± 1 nicht als Eigenwert.
2. Ja, denn wenn $A = SBS^{-1}$, dann gilt $A^t = (SBS^{-1})^t = (S^{-1})^t B^t S^t$ und $(S^{-1})^t = (S^t)^{-1}$.
3. Nein, denn wir können anstatt T auch λT nehmen, mit $\lambda \neq 0$.
4. Nein, z.B. betrachte $p(X) = X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

Zu Aufgabe 23 (7 P) Es gilt

$$
\begin{aligned}
P_A(X) &= \det \begin{pmatrix} -3-X & 2 & -5 & -7 \\ -2 & 1-X & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 3-X & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3-X \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} 2 & -5 & -7 \\ 1-X & -2 & -4 \\ -2 & 3-X & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -3-X & 2 & -7 \\ -2 & 1-X & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&+ (3-X) \det \begin{pmatrix} -3-X & 2 & -5 \\ -2 & 1-X & -2 \\ 1 & -2 & 3-X \end{pmatrix} \\
&= \ldots = (X-1)^2(X-2)X.
\end{aligned}
$$

Die Eigenwerte sind also $0, 1$ und 2.
[3 P, 2 für das Polynom, 1 für die Eigenwerte]
Es ist klar, dass die Eigenräume zu 0 und 2 eindimensional sind und der Gauß-Algorithmus liefert die Eigenvektoren $(-2, -2, -1, 1)$ bzw. $(-1, 0, 1, 0)$.
[2 P]
Andererseits ist der Kern von $A - \mathrm{Id}_{4\times 4}$ zweidimensional und der Eigenraum zum Eigenwert 1 wird z.B. durch die Vektoren $(-2, 1, 2, 0)$ und $(-4, -1, 0, 2)$ aufgespannt. Insbesondere ist A diagonalisierbar.
[1 P]
Eine Matrix S wie in der Aufgabe gefordert erhalten wir, indem wir die Eigenvektoren spaltenweise eintragen.

[1 P]

Zu Aufgabe 24 (3 P) Wir erinnern uns zunächst, dass M die additiven Inversen der Koeffizienten von P in der letzten Spalte hat, und die einzigen weiteren Nicht-Null-Einträge von M, welche allesamt 1 sind, unterhalb der Diagonale sind.
Um die Behauptung zu zeigen, wenden wir den Gauß-Algorithmus auf $M - X\mathrm{Id}_{r\times r}$ an, um die Determinante dieser Matrix auszurechnen. Die Idee ist zunächst durch Vertauschung von Zeilen die Einsen auf die Diagonale zu bringen, was die Determinante mit $(-1)^{r-1}$ multipliziert.
Danach bringt man die resultierende Matrix auf obere Dreiecksgestalt. Dazu müssen wir das X-fache der neuen ersten Zeile zur neuen letzten addieren, dann das X^2-fache der neuen zweiten zur neuen letzten etc. Dies liefert eine obere Dreiecksmatrix mit den Einträgen $1, \ldots, 1, -a_0 - a_1X - \ldots + (-a_{r-1} - X)X^{r-1}$ auf der Diagonale, woraus die Behauptung folgt.

Zu Aufgabe 25 (5 P) Wir wissen, dass $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ein n^2-dimensionaler K-Vektorraum ist. Wähle als Basis die Menge

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, \ldots, E_{n1}, E_{12}, \ldots, E_{n2}, \ldots, E_{nn}\},$$

wobei die Matrix $E_{ij} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte hat und sonst nur Nullen als Einträge.
[1 P]
Direktes Rechnen zeigt dann, dass

$$\Phi(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} E_{kj}.$$

[1 P]
Damit gilt

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A \end{pmatrix},$$

woraus die Behauptung über die charakteristischen Polynome nach Lemma 4 im Abschnitt 4.3 folgt.
[2 P]
Für die Spur ergibt sich damit: $\mathrm{tr}(\Phi) = n\mathrm{tr}(A)$.
[1 P]

Zu Aufgabe 26 (2 P) Nach Basiswahl können wir annehmen, dass f einer Matrix A entspricht.

Sei $P_f(X) = P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$, wobei $a_0 = \det(A) \neq 0$. Cayley-Hamilton gibt $P_A(A) = (-1)^n A^n + \ldots + \det(A)\mathrm{Id}_{n\times n} = 0$. Umstellen gibt

$$-\det(A)\mathrm{Id}_{n\times n} = A((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1\mathrm{Id}_{n\times n}),$$

woraus wir sofort

$$A^{-1} = \frac{(-1)}{\det(A)}((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1\mathrm{Id}_{n\times n})$$

folgern können.

Zu Aufgabe 27 (3 P) Nach Basiswahl können wir annehmen, dass f einer Matrix A entspricht.
Nach Annahme ist A trigonalisierbar und die resultierende Matrix $B = SAS^{-1}$ hat genau die Eigenwerte von A, also die Nullstellen von P_A, auf der Diagonale.
[1 P]
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte. Matrixmultiplikation zeigt dann, dass A^k die Eigenwerte $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ hat.
[1 P]
Sei nun A invertierbar. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ (nach Annahme gilt dabei $\lambda \neq 0$), also $Av = \lambda v$, so zeigt Umstellen, dass $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$, also sind die Eigenwerte von A^{-1} genau $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$. Für Potenzen von A^{-1} kann man den vorherigen Teil verwenden.
[1 P]