Lösungshinweise zu Blatt # 4
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Zu den kurzen Fragen (4 P)

Wir führen für $(p \cdot q)_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$ die Schreibweise $\sum_{i+j=n} p_i q_j$ ein.

1. Sei $p = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$ und $q = \sum_{j=0}^{m} q_j X^j$. Dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(p)\tilde{\alpha}(q) = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha(p_i)t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \alpha(q_j)t^j\right) &\overset{\text{T komm.}}{=} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha(p_i)\alpha(q_j)t^{i+j} \\ &\overset{\alpha\text{ Ringhom.}}{=} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha(p_i q_j)t^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m}\sum_{i+j=k} \alpha(p_i q_j)t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \alpha\left((p \cdot q)_k\right) t^k = \tilde{\alpha}(p \cdot q).\end{aligned}$$

2. Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Das Polynom $p(X) = X^2 - 5X$ hat die Nullstellen $0, 2, 3$ und 5, denn $p(X) = (X-2)(X-3) = X(X-5)$.

3. Nein: Sind zum Beispiel $M, N \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, dann folgt aus 4.3, Lemma 3, dass $\deg(P_{MN}) = n$ gilt. Nach 4.2, Lemma 8 gilt allerdings $\deg(P_M P_N) = \deg(P_M) + \deg(P_N) = 2n$.

4. Sei $\mathcal{B}$ eine andere Basis von V. Dann gibt es eine Matrix $T := T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, so dass $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(f) = T\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)T^{-1}$. Damit folgt

$$\mathrm{tr}\, f = \mathrm{tr}(T\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)T^{-1}) \overset{\text{Z2A7}}{=} \mathrm{tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)T^{-1}T) = \mathrm{tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))$$

Zu Aufgabe 16 (2 P)

Assoziativität:

Es ist zu zeigen, dass für alle $p, q, r \in R[X]$ die Identität $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$ gilt: Seien $a = p \cdot (q \cdot r)$ und $b = (p \cdot q) \cdot r$. Dann ist

$$\begin{aligned}a_n = \sum_{i+j=n} p_i (q \cdot r)_j = \sum_{i+j=n} p_i \left(\sum_{u+v=j} q_u r_v\right) \\ = \sum_{i+j=n}\sum_{u+v=j} p_i q_u r_v = \sum_{i+u+v=n} p_i q_u r_v\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{i+j=n} (p \cdot q)_i r_j = \sum_{i+j=n} \left(\sum_{u+v=i} p_u \; q_v \right) r_j \\ &= \sum_{i+j=n} \sum_{u+v=i} p_u q_v r_j = \sum_{u+v+j=n} p_u q_v r_j. \end{aligned}$$

Da die Umbenennung der Indizes die Summe nicht ändert, ist $a_n = b_n$.

Distributivität:

Sei nun $a = p \cdot (q + r)$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i+j=n} p_i (q + r)_j = \sum_{i+j=n} p_i (q_j + r_j) = \sum_{i+j=n} p_i q_j + p_i r_j \\ &= \sum_{i+j=n} p_i q_j + \sum_{i+j=n} p_i r_j = (p \cdot q)_n + (p \cdot r)_n. \end{aligned}$$

Genauso zeigt man $(p + q) \cdot r = p \cdot r + p \cdot r$.

Zu Aufgabe 17 (3 P)

Da $q \neq 0$, gibt es nach 4.2, Satz 9 (Division mit Rest) $g, r \in K[X]$, so dass $p = q \cdot g + r$ und $\deg(r) < \deg(q)$. Wir erhalten

$$q \cdot g + r = q \cdot f \implies r = q \cdot (f - g) \implies \deg(r) = \deg(q) + \deg(f - g).$$

Dies kann nur gelten, wenn $\deg(r) = \deg(f - g) = -\infty$, d.h. $f = g$ gilt.

Alternative:
Wir zeigen die Aussage per Induktion über $\deg(p)$.

A(n) = „$\forall p, q \in K[X], q \neq 0, f \in L[X] : (\deg(p) = n \wedge p = q \cdot f) \Rightarrow f \in K[X]$. “

A(0):

Nach 4.2, Lemma 3 gilt $\deg(p) = \deg(q) + \deg(f)$. Insbesondere ist der Grad von q und f auch 0. Weiter folgt

$$p = p_0 = (q \cdot f)_0 = q_0 f_0.$$

Wegen $q \neq 0$ gilt $f_0 = p_0 / q_0 \in K$ und somit ist $f \in K[X]$.

<ins>$\mathrm{A}(n) \Rightarrow \mathrm{A}(n+1)$:</ins>

Sei $\deg(q) = k$ und $\deg(f) = m$, so dass $p = q \cdot f$ vom Grad $m + k = n + 1$ ist. Dann ist $p_{n+1} = (q \cdot f)_{n+1} = q_k f_m$, also $f_m = p_{n+1}/q_k \in K$. Da das Polynom $\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-1} q_i f_j X^{i+j}$ vom Grad $\leq n$ ist, ist nach Induktionsannahme auch jedes f_i mit $i < m$ in K. Also ist $f \in K[X]$.

Zu Aufgabe 18 (5 P)

(Diese Lösung ist vollständig ausformuliert. D.h. in etwa diesem Umfang erwarten wir Ihre Abgaben.)

1. [2 P] Das gesuchte Polynom p ist gegeben durch

$$\begin{aligned} g_k(x) &:= \frac{1}{\prod_{i=1, j\neq k}^{n} (x_k - x_i)} \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (x - x_j), \\ p(x) &:= \sum_{k=1}^{n} y_k g_k(x). \end{aligned}$$

2. [2 P] Zur Eindeutigkeit: Sei $q \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$, so dass $q(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann hat das Polynom $p - q$ mindestens n Nullstellen. Da aber der Grad von $p - q$ höchstens $n - 1$ ist, muss nach 4.2, Satz 12 $p - q = 0$ gelten.

   Alternative:

   Ein allgemeines Polynom q vom Grad $\leq n - 1$ hat die Form $q(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$. Das Problem in der Aufgabenstellung wird beschrieben durch ein lineares Gleichungssystem, deren Matrixdarstellung durch die Vandermonde-Matrix gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

   Da wegen $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ alle Zeilenvektoren linear unabhängig sind, hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.

3. [1 P] φ ist surjektiv, wenn K endlich ist.

Zu Aufgabe 19 (2 P)

Man rechnet nach, dass $P_M = -X^3 + (i + e + a)X^2 + (fh - ei - ai + cg - ae + bd)X + aei - bdi - afh + cdh + bfg - ceg$ gilt.

Zu Aufgabe 20 (4 P)
Zunächst zeigen wir allgemein, dass

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det(A)\det(C).$$

Wir faktorisieren die Matrix in

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n\times n} & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{n\times n} & B \\ \hline 0 & I_{m\times m} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{m\times m} \end{array}\right).$$

Unter Nutzung von 3.2, Bemerkung 13.7 und 13.9 und der Multiplizität der Determinate erhalten wir

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) &= \det\left(\left(\begin{array}{c|c} I_{n\times n} & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_{n\times n} & B \\ \hline 0 & I_{m\times m} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{m\times m} \end{array}\right)\right) \\ &= \det\left(\left(\begin{array}{c|c} I_{n\times n} & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\right)\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{m\times m} \end{array}\right)\right) \\ &= \det(A)\det(C).\end{aligned}$$

Mit dieser Formel können wir nun das charakteristische Polynom von M bestimmen:

$$\begin{aligned}P_M &= \det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) - XI_{(n+m)\times(n+m)}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} A - XI_{n\times n} & B \\ \hline 0 & C - XI_{m\times m} \end{array}\right) \\ &= \det(A - XI_{n\times n})\det(C - XI_{m\times m}) = P_A P_C.\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 21 (2 P)
Seien $M, N, L \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

Reflexivität: $M \sim M$

Wähle $T = I_{n\times n}$.

Symmetrie: $M \sim N \Rightarrow N \sim M$

Nach Voraussetzung gibt es ein $T \in \mathrm{GL}(n \times n, K)$, so dass $M = T^{-1}NT$. Aber dann gilt auch $TMT^{-1} = N$.

Transitivität: $M \sim N \land N \sim L \Rightarrow M \sim L$

Es gibt $T, S \in \mathrm{GL}(n \times n, K)$, so dass $M = T^{-1}NT$ und $N = S^{-1}LS$. Es folgt

$$M = T^{-1}NT = T^{-1}S^{-1}RST = (ST)^{-1}L(ST).$$

Zu Aufgabe 22 (2 P)
Das Polynom f lässt sich zerlegen in $f(X) = (X^2 - 2)(X - 1)^2(X + 3)$, wobei $(X^2 - 2)$ keine Nullstellen in $\mathbb{Z}$ hat.