Übungsblatt # 11
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (3 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze). Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Gibt es eine K-lineare Abbildung $\mathrm{End}_K(V) \otimes V \to V$, die

1. $A \otimes v$ auf Av abbildet?
2. $A \otimes v$ auf $\mathrm{tr}(A)v$ abbildet?
3. $A \otimes v$ auf $\det(A)v$ abbildet?

Aufgabe 56 (4 P) Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Beweisen Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn das Minimalpolynom m_A in Linearfaktoren zerfällt und nur einfache Nullstellen besitzt.

Aufgabe 57 (2 P)

1. Seien e_1, e_2 die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^2$. Warum gilt für $x := e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$, dass $x \neq p \otimes q$ für alle $p, q \in \mathbb{R}^2$?
2. Zeigen Sie, dass
$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 58 (2 P) (Beweis von Satz 6.1.5) Sei K ein Körper, und seien T, t und T', t' Tensorprodukte der K-Vektorräume U und V. Dann existiert genau eine K-lineare Abbildung $\phi\colon T \to T'$ mit $t' = \phi \circ t$, und diese ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 59 (2 P) (Beweis von Lemma 6.1.7) Sei K ein Körper, und seien U, V K-Vektorräume und $(u_i)_{i \in I}$, $(v_j)_{j \in J}$ Basen von U bzw. V. Zeigen Sie, dass ein Tensorprodukt von U und V gegeben ist durch

- einen Vektorraum T mit Basis $(e_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$,
- die eindeutige bilineare Abbildung $t\colon U \times V \to T$ mit der Eigenschaft, dass $t(u_i, v_j) = e_{ij}$.

Aufgabe 60 (3 P) Sei K ein Körper, U, V K-Vektorräume mit $\dim_K U < \infty$, und

$$\phi\colon V \otimes U^* \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_K(U, V)$$

der eindeutige Isomorphismus aus Bem. 6.1.10 5) mit $\phi(v \otimes \varphi) = \varphi(-) \cdot v$ für $v \in V$ und $\varphi \in U^*$.

1. Sei $V = U$ und sei $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U. Drücken Sie $\phi^{-1}(\mathrm{id}_U)$ durch die Basis $(u_i)_{i \in I}$ und ihr Duales $(u_i^*)_{i \in I}$ aus.

2. Sei $v \in V$ und $\psi \in U^*$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes der linearen Abbildung $f := \phi(v \otimes \psi)\colon U \to V$.

Aufgabe 61 (8 P) Seien K ein Körper und V, W K-Vektorräume. Der *Bidualraum* von V ist definiert als $V^{**} := (V^*)^*$ (vgl. Def. 2.8.1). Entsprechend definiert man für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ die biduale Abbildung als die K-lineare Abbildung $f^{**} := (f^*)^*\colon V^{**} \to W^{**}$ (vgl. Def. 2.8.3).

1. Zeigen Sie, dass die Vorschrift $\delta_V(v)(\psi) := \psi(v)$, wobei $\psi \in V^*$, eine K-lineare Abbildung $\delta_V\colon V \to V^{**}$ definiert.

2. Zeigen Sie, dass

   (a) δ_V injektiv ist, und dass

   (b) δ_V für $\dim_K V < \infty$ ein Isomorphismus ist.

3. (a) Sei $f\colon V \to W$ K-linear und $\varphi \in V^{**}$. Beschreiben Sie $f^{**}(\varphi)$, indem Sie es auf $\xi \in W^*$ auswerten. Drücken Sie das Ergebnis durch f aus (statt durch f^* oder f^{**}).

   (b) Zeigen Sie, dass für jede K-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\delta_V} & V^{**} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{**}} \\ W & \xrightarrow{\delta_W} & W^{**} \end{array} \quad .$$

4. („Für das einfache Duale geht das nicht.“)
   Zeigen Sie, dass es keine Wahl von K-linearen Isomorphismen $\epsilon_V\colon V \to V^*$ gibt, wobei V über die endlichdimensionalen K-Vektorräume läuft, so dass für jede K-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ von endlichdimensionalen K-Vektorräumen das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\epsilon_V} & V^* \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ W & \xrightarrow{\epsilon_W} & W^* \end{array} \quad .$$