# Übungsblatt # 10
# Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

---

**Kurze Fragen** (4 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Sei $M$ eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken $A$ und $B$. Gilt dann für die Minimalpolynome $m_M = m_A m_B$?

2. Rekursives Anwenden des Arguments im Beweis von Satz 5.4.5 zeigt zunächst, dass es $T, W \in \mathrm{GL}(n, K[X])$ mit $TMW^{-1} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$ gibt, wobei die $d_i \in K[X]$ Polynome mit $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, ..., n-1$ sind, die allerdings nicht normiert sind. Warum folgt daraus die Aussage des Satzes?

3. Warum gilt für einen Körper $K$ und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ folgende Aussage für das charakteristische und das Minimalpolynom von $A$ (Bew. von Korollar 5.4.11):

$$P_A \text{ zerfällt in Linearfaktoren} \quad \Longleftrightarrow \quad m_A \text{ zerfällt in Linearfaktoren} \quad ?$$

4. Warum gibt es einen $K[X]$-Modulisomorphismus:

$$K[X]/\langle (X-\lambda)^n \rangle \simeq (K^n, J(n, \lambda))$$

(Details zu Lemma 5.4.14)?

**Aufgabe 50** (4 P) Sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ähnlich? Geben Sie Ihren Rechenweg an.

**Aufgabe 51** (2 P)
Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform und die Frobenius-Normalform für die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 52** (4 P) Sei $n \geq 1$, $\lambda \in K$ und $J(n, \lambda)$ der Jordanblock der Größe $n$.

1. Bestimmen Sie die Invariantenteiler von $J(n, \lambda)$. Bestimmen Sie damit das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von $J(n, \lambda)$.
2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils eine Basis der zugehörigen Eigenräume von $J(n, \lambda)$.
3. Hat $J(n, \lambda)$ eine Hauptraumzerlegung? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

**Aufgabe 53** (3 P) (Beweis von Satz 5.3.10 1)) Sei $K$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Zeigen Sie, dass der letzte Invariantenteiler der charakteristischen Matrix $M_A$ gleich dem Minimalpolyonom $m_A$ ist: $c_n(M_A) = m_A$.

**Aufgabe 54** (3 P) Sei $R$ ein Ring mit 1. Zeigen Sie, dass die Struktur eines $R$-Moduls auf einer abelschen Gruppe $M$ äquivalent zu einem einserhaltenden Ringhomomorphismus $R \to \mathrm{End}(M)$ ist.
D.h., geben Sie eine Bijektion zwischen der Menge von Wirkungen

$$\{\varphi : R \times M \to M \mid (M, \varphi) \text{ ist ein } R\text{-Modul}\}$$

und der Menge $\mathrm{Hom}(R, \mathrm{End}(M))$ von Ringhomomorphismen an, wobei $\mathrm{End}(M)$ den Ring der Gruppenhomomorphismen von $M$ nach $M$ bezeichnet.

**Aufgabe 55** (4 P) Geben Sie genau einen Repräsentanten für jede Ähnlichkeitsklasse in $\mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{F}_3)$ an. Wie viele Ähnlichkeitsklassen gibt es insgesamt?