Übungsblatt 9
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (4 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Warum ist $\mathcal{P} = \{X + z \mid z \in \mathbb{C}\}$ ein Vertretersystem der Primelemente von $\mathbb{C}[X]$?
2. Wenn M ein Modul über einem kommutativen Ring R ist und $p \in R$, warum ist $M_p = \{x \in M \mid \exists m \in \mathbb{N} \colon p^m x = 0\}$ ein Untermodul von M?
3. Wenn A und B (3×3)-Diagonal-Matrizen über den komplexen Zahlen sind, folgt dann aus $m_A \mid m_B$ schon, dass $P_A \mid P_B$?
4. Warum gilt $G \circ F = 0$ in 5.4, Lemma 3?

Aufgabe 45 (4 P) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom, die Eigenwerte und die Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 20 & 40 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 46 (3 P) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ heißt *unipotent*, wenn $A - \mathrm{I}_{n\times n}$ nilpotent ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Eine unipotente Matrix ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.
2. Eine unipotente Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn der Grad ihres Minimalpolynoms 1 ist.

Aufgabe 47 (6 P) Sei V ein K-Vektorraum. Ein Endomorphismus p von V heißt *Projektion*, wenn $p^2 = p$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{id} - p$ eine Projektion ist, wenn p eine ist.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte einer Projektion.
3. Zeigen Sie, dass jede Projektion diagonalisierbar ist.
4. Sei nun $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f^2 = af$ mit $a \in K^*$. Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist, und geben Sie die Eigenwerte von f an.

Aufgabe 48 (5 P) Sei V ein K-Vektorraum.

1. Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ diagonalisierbar, und sei U ein f-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass f auf U ebenfalls diagonalisierbar ist.

2. Seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ diagonalisierbar und $fg = gf$. Zeigen Sie, dass eine Basis von V existiert, die aus gemeinsamen Eigenvektoren von f und g besteht.

3. Sei nun V endlich-dimensional, I sei eine beliebige Indexmenge, und seien $f_i \in \mathrm{End}_K(V)$ für $i \in I$ diagonalisierbar und $f_i f_j = f_j f_i$ für alle $i, j \in I$. Zeigen Sie, dass eine Basis von V existiert, deren Elemente Eigenvektoren zu allen f_i gleichzeitig sind.

Aufgabe 49 (2 P) Seien V und W Moduln über $K[X]$, welche wir nach Lemma 10 im Abschnitt 5.3 als Paare (V, f) und (W, g) bestehend aus einem Vektorraum und einem Endomorphismus auffassen können. Zeigen Sie die folgende Gleichheit:

$$\mathrm{Hom}_{K[X]}(V, W) = \{\Phi\colon V \to W \mid \Phi \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \wedge \Phi \circ f = g \circ \Phi\}.$$