Übungsblatt # 3
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (5 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Sei F ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen K-Vektorraums und M eine darstellende Matrix von F. Wieso ist F diagonalisierbar, wenn M diagonalisierbar ist? (Details zu 4.1, Lemma 10)

2. Sei V ein K-Vektorraum, I eine Menge und $(W_i)_{i\in I}$ eine Familie von K-Untervektorräumen von V. Wieso folgt aus der Bedingung

$$W_i \cap \operatorname{span}\Big(\bigcup_{j\in I\setminus\{i\}} W_j\Big) = 0 \qquad \text{für alle} \quad i \in I,$$

die Bedingung

$$W_i \cap W_j = 0 \qquad \text{für alle} \quad i, j \in I, i \neq j,$$

aber nicht umgekehrt?

3. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und Polynome $f, g \in R[X]$, so dass

$$\deg(fg) < \deg(f) + \deg(g).$$

(vgl. 4.2, Lemma 8).

4. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $p, q \in R[X]$. Sei ferner q von der Form $q = q_n X^n + \cdots + q_0$, mit $q_n \in R^*$. Warum gilt dann $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$ (vgl. 4.2, Bem. 10)?

Aufgabe 10 (2 P) (Beweis von 4.1, Korollar 17) Beweisen Sie die folgende Aussage durch Zurückführen auf 4.1, Satz 15:
Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \operatorname{End}_K(V)$. Dann gilt für alle $\lambda \in K$:

$$\operatorname{Eig}(f, \lambda) \cap \operatorname{span}\Big(\bigcup_{\mu\in K\setminus\{\lambda\}} \operatorname{Eig}(f, \mu)\Big) = \{0\} .$$

Aufgabe 11 (3 P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \operatorname{End}(V)$. Man zeige, dass F und der duale Endomorphismus

$$F^* : V^* \to V^*$$

die gleichen Eigenwerte haben.

Aufgabe 12 (4 P) Sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -18 & 3 & -9 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Man berechne alle Eigenwerte von M und eine Basis der Eigenräume. Ist M diagonalisierbar?

Aufgabe 13 (4 P) (Beweis von 4.1, Bemerkung 19.2) Sei V ein K-Vektorraum, I eine Menge und $(W_i)_{i\in I}$ eine Familie von K-Untervektorräumen von V, so dass $V = \oplus_{i\in I} W_i$. Für jedes $i \in I$ sei $(w_j^{(i)})_{j\in J^{(i)}}$ eine Familie von Vektoren in W_i. Man zeige die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

1. Für jedes $i \in I$ ist $(w_j^{(i)})_{j\in J^{(i)}}$ eine Basis von W_i.

2. Sei $M = \{(i,j) \,|\, i \in I\,,\, j \in J^{(i)}\}$. Die Familie $(w_j^{(i)})_{(i,j)\in M}$ ist eine Basis von V.

Aufgabe 14 (2 P) Seien $f = 2(X^4 + X^3) + (X+3)^2$ und $g = X + 1$ Elemente in $\mathbb{Z}[X]$. Man bestimme die Polynome $q, r \in \mathbb{Z}[X]$, mit

$$f = qg + r, \qquad \text{und } \deg(r) < \deg(g).$$

Aufgabe 15 (4 P) Sei K ein Körper der Charakteristik 0 (vergleiche LA1, Z11 A52). Der Polynomring $K[X,Y]$ in zwei Variablen X, Y über K ist definiert als $K[X,Y] = (K[X])[Y]$. Jedes Element $f \in K[X,Y]$ hat eine in den Koeffizienten $a_{ij} \in K$ eindeutige Darstellung der Form

$$f = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} X^i Y^j.$$

Man betrachte den Endomorphismus $\Delta \in \mathrm{End}_K(K[X,Y])$ mit

$$\Delta : f \mapsto X \cdot \delta_X(f) + Y \cdot \delta_Y(f),$$

wobei δ_X (bzw. δ_Y) die Ableitung nach X (bzw. nach Y) ist. Z.B. $\delta_X(X^3Y) = 3X^2Y$.

1. Ist Δ diagonalisierbar? Geben Sie ggf. die Eigenraumzerlegung von $K[X,Y]$ an.

2. Was passiert für $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit p prim?