Übungsblatt # 2
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (4 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Sei A eine 3×3-Matrix mit reellen Einträgen. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und w ein Eigenvektor zum Eigenwert μ, ist dann das Kreuzprodukt $v \times w$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda\mu$?

2. Kann eine quadratische invertierbare Matrix den Eigenwert 0 haben?

3. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A?

4. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Ist 2 ein Eigenwert von A?

Aufgabe 5 (2 P)

1. Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren $v, w, u \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$$v \times (w \times u) = (v, u)\, w - (v, w)\, u.$$

2. Zeigen Sie die folgende Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel: Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist assoziativ.

Aufgabe 6 (6 P)

1. Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene und seien $N \in \mathbb{R}^n$, $N \neq 0$, und $r \in \mathbb{R}$ so, dass $H = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (N, v) = r\}$. Sei H' eine weitere Hyperebene und N', r' das zu H' gehörige Datum. Zeigen Sie, dass
$$H = H' \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \colon N' = \lambda N \text{ und } r' = \lambda r.$$

2. Seien $H = \{x_1 + x_2 + x_3 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$, $H' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ und $H'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$ drei Hyperebenen im $\mathbb{R}^3$. Geben Sie Paare (N, r), (N', r') und (N'', r'') wie in Teilaufgabe 1. an. Sind die Hyperebenen H, H' und H'' alle verschieden? Wenn nicht, welche sind gleich?

Aufgabe 7 (4 P) Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Wir definieren die *Spur* von A durch die Formel $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Die Spur definiert eine lineare Abbildung $\mathrm{tr}\colon \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K,\ A \mapsto \mathrm{tr}(A)$.
2. Sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, dann gilt $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Ist A diagonalisierbar, so ist die Spur von A gleich der Summe der Eigenwerte von A.

Aufgabe 8 (4 P) Wir betrachten einen Wald mit f Füchsen und h Hasen. Wir nehmen an, dass sich die Entwicklung dieser Populationen wie folgt beschreiben lässt: Die Hasen vermehren sich recht fleißig, sodass sich ihre Anzahl jeden Monat vervierfacht, allerdings frisst jeder Fuchs auch ein Hasenpaar jeden Monat. Weil es genug zu fressen gibt, vermehren sich die Füchse natürlich, und wir nehmen an, dass sich nach einem Monat die Anzahl der Füchse um die Anzahl der Hasen erhöht.

a) Zu einem Zeitpunkt 0 sei die Anzahl von Füchsen und Hasen $f(0) = 100$ und $h(0) = 100$. Geben Sie geschlossene Formeln an, die die Anzahl der Hasen $h(t)$ und der Füchse $f(t)$ nach t Monaten ($t \in \mathbb{N}$) beschreiben.

b) Lösen Sie Teil a) für $f(0) = 500$ und $h(0) = 600$.

Aufgabe 9 (4 P) Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass FG und GF die gleichen Eigenwerte haben.