Übungsblatt # 1
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (3 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Wenn K ein Körper ist, existiert für $m > n$ eine injektive K-lineare Abbildung $K^m \to K^n$?

2. Ist die Vereinigung zweier Erzeugendensysteme in einem Vektorraum ebenfalls ein Erzeugendensystem?

3. Seien $f, g\colon K^m \to K^n$ zwei K-lineare Abbildungen. Gilt dann

$$\dim \ker(f + g) = \dim \ker(f) + \dim \ker(g)?$$

Aufgabe 1 (5 P)

Betrachten Sie folgendes Verfahren zur Berechnung von A^{-1} für eine invertierbare $n \times n$ Matrix A:

$$\left(\ A \ \middle| \ I_{n\times n} \ \right) \xrightarrow{\text{Gauß}} \left(\ I_{n\times n} \ \middle| \ A^{-1} \ \right)$$

D.h. ähnlich wie beim erweiterten Gaußverfahren, schreibt man die Einheitsmatrix hinter A und führt den Gaußalgorithmus durch, bis vorne die Zeilenstufenform steht (mit Pivot-Elementen Eins und sonst nur Nullen). Ist diese die Einheitsmatrix, so ist aus der hinteren Einheitsmatrix A^{-1} geworden.

1. Begründen Sie dieses Verfahren, indem Sie es auf den Gaußalgorithmus zum Lösen von Gleichungssystemen der Form $Ax = b$ zurückführen.

   Was passiert in dem Verfahren, wenn A nicht invertierbar ist?

2. Berechnen Sie die Inversen, falls existent, der folgenden Matrizen:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (3 P)
Betrachten Sie Funktionen der Form $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ (also reelle Polynome von Grad ≤ 3). Sei V der Vektorraum der Funktionen dieser Gestalt und sei $D\colon V \to V$ die lineare Abbildung $f \mapsto \frac{d}{dx}f$. Betrachten Sie die Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ von V.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ ebenfalls eine Basis von V ist.

2. Berechnen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(D)$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$.

3. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix ${T_{\mathcal{C}}}^{\mathcal{B}}$.

Aufgabe 3 (6 P)
Sei V ein n-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Sei v ein beliebiger Vektor in V, der nicht der Nullvektor ist. Zeigen Sie, dass für die Abbildung

$$s_v\colon V \to V, \quad w \mapsto w - 2\frac{(v,w)}{(v,v)}v$$

folgende Aussagen zutreffen:

1. Die Abbildung s_v ist linear,

2. $s_v(v) = -v$, $s_v(v') = v'$ für $v' \in (\mathbb{R}v)^\perp$,

3. s_v ist orthogonal, d.h. $(w, w') = (s_v(w), s_v(w'))$ für alle $w, w' \in V$,

4. $s_v^2 = \mathrm{id}$.

5. Berechnen Sie $\det(s_v)$.

Bemerkung: Die Abbildung s_v heißt Spiegelung an der Hyperebene $(\mathbb{R}v)^\perp$ und 2. und 4. zeigen, warum.

Aufgabe 4 (7 P)
Sei K ein Körper mit q Elementen. Zeigen Sie:

1. Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, so hat V genau q^n Elemente.

2. Ist V 1-dimensional, so gibt es $q-1$ verschiedene Basen für V.

3. Ist V 2-dimensional, dann gibt es $(q^2-1)(q^2-q)$ verschiedene geordnete Basen für V, d.h. die Menge $\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid (v_1, v_2) \text{ ist Basis von } V\}$ hat $(q^2-1)(q^2-q)$ Elemente.

4. Sei V n-dimensional. Dann gibt es $q^{n(n-1)/2}(q-1)(q^2-1)\cdots(q^n-1)$ verschiedene geordnete Basen für V.

5. Die Gruppe $GL(n, K)$ hat $q^{n(n-1)/2}(q-1)(q^2-1)\cdots(q^n-1)$ Elemente.