

## Lösungen zu Dynamische Systeme

**Aufgabe 1.1** (20 Punkte) Ergänzen Sie die Stabilitätsanalyse des Fixpunktes  $p = \frac{R-1}{R}$  für die Abbildung  $F : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  mit  $F(x) = Rx(1-x)$ , indem Sie zeigen:

- (a) für  $1 < R \leq 2$  konvergieren alle Orbits in  $(0, 1)$  gegen  $p$  *letztendlich monoton*, d.h.  $\forall x \in (0, 1) \exists N > 0$  s.d. entweder  $x_n < x_{n+1} < p$  für alle  $n > N$  oder  $p < x_{n+1} < x_n$  für alle  $n > N$ ; und  $x_n \rightarrow p$  als  $n \rightarrow \infty$  gilt;
- (b) für  $2 < R < 3$  konvergieren alle Orbits in  $(0, 1)$  gegen  $p$  *letztendlich abwechselnd*, d.h.  $\forall x \in (0, 1) \exists N > 0$  s.d.  $(x_n - p)$  und  $(x_{n+1} - p)$  umgekehrte Vorzeichen besitzen für alle  $n > N$  und  $x_n \rightarrow p$  als  $n \rightarrow \infty$  gilt.

**Lösung der Aufgabe 1.1 (a)** Da

$$F(x) - x = Rx(1-x) - x = x((R-1) - Rx)$$

ist, gilt

$$F(x) < x \Leftrightarrow (R-x) - Rx < 0 \Leftrightarrow x > \frac{R-1}{R} = p$$

und

$$F(x) > x \Leftrightarrow (R-x) - Rx > 0 \Leftrightarrow x < \frac{R-1}{R} = p. \quad (1)$$

Das heißt, ist  $x$  kleiner bzw. größer als  $p$ , so steigt bzw. fällt  $F(x)$ . Wir zeigen, dass  $(F(x) - p)$  und  $(x - p)$  immer das gleiche Vorzeichen haben. Da  $R \leq 2$  ist, gilt

$$F_{\max} = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{R}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

Damit können wir annehmen (o.B.d.A.)  $x_0 \leq \frac{1}{2}$ . Auch es folgt aus  $R \leq 2$

$$p = \frac{R-1}{R} = 1 - \frac{1}{R} \leq \frac{1}{2}.$$

Betrachte nun

$$F(x) - p = F(x) - F(p) = (x-p) \frac{dF}{dx}(c) = (x-p)R(1-2c),$$

für ein  $c$  zwischen  $x, p$ . Da aber  $x, p \leq \frac{1}{2}$  ist, ist  $c \leq \frac{1}{2}$  und “=” gilt g.d.w.  $x = p$ . Es folgt für alle  $x \neq p$ , besetzen  $(F(x) - p)$  und  $(x - p)$  das gleiche Vorzeichen.

Sei  $x < p$ . Dann gilt  $F(x) > x$ , aber mit  $F(x) < p$ . In Kürze,  $x < F(x) < p$  für alle  $x < p$ . Ist nun  $x_0 < p$ , so erzeugt es eine Folge  $\{x_n\}$  mit

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < p.$$

Da jede steigende Folge einen Grenzwert besitzt, gibt es ein  $p'$  s.d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p'$ .

Man sieht

$$F(p') = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p'.$$

Aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes von  $F$  folgt  $p' = p$ .

Sei  $x > p$ . Dann gilt  $p < F(x) < x$ . Ist  $x_0 > p$ , so erzeugt es eine Folge  $\{x_n\}$  mit

$$p < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0.$$

Im Analog zeigt man  $x_n \rightarrow p$  als  $n \rightarrow \infty$ .

**Lösung der Aufgabe 1.1 (b)** Da  $2 < R \leq 3$  ist, gilt  $p > \frac{1}{2}$  und

$$F(x) - p = (x - p) \frac{dF}{dx}(c) = (x - p)R(1 - 2c)$$

für ein  $c$  zwischen  $x, p$ .

Ist  $x > p$ , so ist  $x, p > \frac{1}{2}$  und damit  $c > \frac{1}{2}$  und folglich  $F(x) < p$ .

Ist  $x < p$  mit  $\frac{1}{2} \leq x < p$ , so ist wieder  $c > \frac{1}{2}$  und damit  $F(x) > p$ .

Ist aber  $x < \frac{1}{2} < p$ , so steigt zuerst  $F(x)$  (vgl. (1)) bis es  $\frac{1}{2}$  überschreitet und oszilliert danach.

**Aufgabe 1.2** Betrachten Sie die *Bernoulli-Abbildung* (oder Dopplung-Abbildung)  $D : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  mit  $D(x) = 2x \pmod{1}$ , oder äquivalent

$$D(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}.$$

- (a) (10 Punkte) Beschreiben Sie den Orbit von
- (a1)  $x_0 = 0.3$ ;
  - (a2)  $x_0 = 0.7$ ;
  - (a3)  $x_0 = \frac{1}{8}$ ;
  - (a4)  $x_0 = \frac{1}{7}$ ;
  - (a5)  $x_0 = \frac{3}{11}$ .
- (b) (10 Punkte) Erklären Sie warum das Bestimmen des Orbits von  $\frac{1}{7}$  einem Computer Schwierigkeit bereitet würde wenn man mit Dezimalbruchentwicklung anfängt.
- (c) (10 Punkte) Bestimmen Sie die explizite Formel von  $D^2(x)$  und zeichnen Sie den Graph von  $D^n(x)$  für  $n = 1, 2, 3$ .
- (d) (10 Punkte) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von  $D^n(x)$  für  $n = 1, 2, 3$ . Wie viele Fixpunkte besitzt  $D^n(x)$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ ?

**Lösung der Aufgabe 1.2 (a)** Der Orbit von 0.3 ist letztendlich periodisch der Periode 4. Der Zyklus ist  $\{0.6, 0.2, 0.4, 0.8\}$ . Der von 0.7 ist auch letztendlich periodisch der Periode 4 mit dem gleichen Zyklus. Der von  $\frac{1}{8}$  ist letztendlich am Fixpunkt 0 gelandet. Der Orbit von  $\frac{1}{7}$  ist periodisch der Periode 3 mit  $\{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$ . Der Orbit von  $\frac{3}{11}$  ist periodisch der Periode 10 mit  $\{\frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, \frac{5}{11}, \frac{10}{11}, \frac{9}{11}, \frac{7}{11}\}$ .

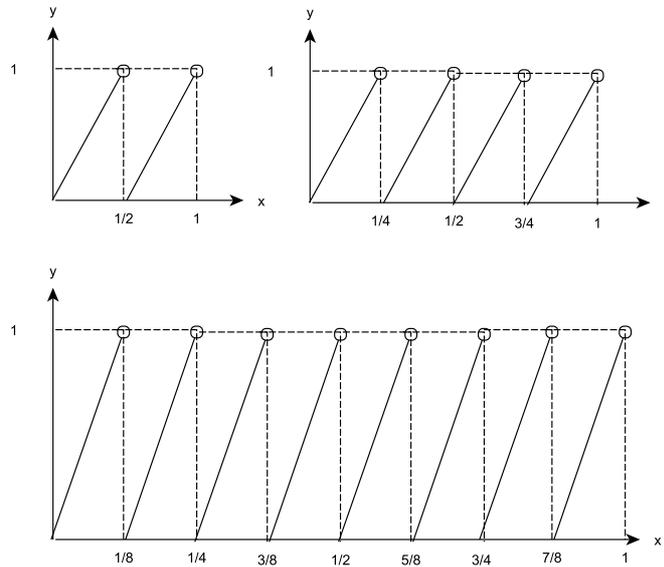


Abbildung 1: Graph von  $D^n(x)$  für  $n = 1, 2, 3$  (vgl. Aufgabe 1.2.c).

**Lösung der Aufgabe 1.2 (b)** Computer speichert Zahlen durch Binärcodierung und typisch die ersten 50 Ziffern oder so. Jedes Mal als die Abbildung  $D(x)$  auf  $x$  verwendet, setzt er fort das Dezimalzeichen in der Binärcodierung nach recht einmal zu verschieben und den Ganzzahl-Teil davon wegzuschmeißen. Als dieser Prozess sich wiederholt, gerät letztendlich die Zahl  $x$  komplett außerhalb des Bruchteils und wird abgetrennt. Der Rundungsfehler ist also so groß wie die Zahl  $x$  selbst.

**Lösung der Aufgabe 1.2 (c)**  $D^2(x) \equiv 4x \pmod{1}$  oder äquivalent

$$D^2(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 4x - 1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4x - 2 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4x - 3 & \frac{3}{4} \leq x < 1 \end{cases}$$

**Lösung der Aufgabe 1.2 (d)**  $D(x)$  hat einen einzigen Fixpunkt  $x = 0$ . Für Fixpunkte von  $D^2(x)$  betrachte  $4x = x \pmod{1}$ , oder  $3x = k$  für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $x \in [0, 1)$ . Daraus folgt  $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ . Im Analog findet man Fixpunkte von  $D^3(x)$ :  $0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ . Im Allgemein hat  $D^n(x)$   $(2^n - 1)$  Fixpunkte.

**Aufgabe 1.3** (20 Punkte)

- (a) Begründen Sie, dass das durch Bernoulli-Abbildung erzeugte dynamische System chaotisch ist (*Hinweis: ähnhlich gezeigt als für  $F(x) = 4x(1 - x)$* ).
- (b) Entwerfen Sie ein weiteres chaotisches System mit dem gleichen Prinzip.

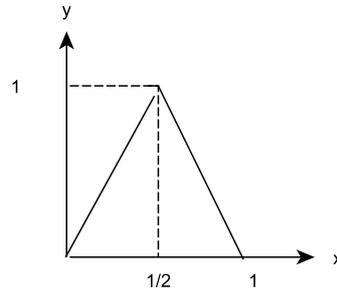


Abbildung 2: Graph vom “Zelt-Abbildung” (vgl. Aufgabe 1.3.b).

**Lösung der Aufgabe 1.3(a)** Die Abbildung  $D$  bildet jeweils von  $I_0 = [0, \frac{1}{2})$  und  $I_1 = [\frac{1}{2}, 1)$  in  $[0, 1)$  bijektiv. Weiter bildet  $D^2$  jeweils von  $I_{00} = [0, \frac{1}{4})$ ,  $I_{01} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ,  $I_{10} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$  und  $I_{11} = [\frac{3}{4}, 1)$  bijektiv in  $[0, 1)$ . Im Allgemeinen bildet  $D^n$   $2^n$  disjunkte Teilintervalle der gleichen Länge bijektiv in  $[0, 1)$ . Es erzeugt eine Binärcodierung für  $x \in [0, 1)$ :  $x$  entspricht  $\delta_0\delta_1 \dots \delta_n \dots$  für  $\delta_i \in \{0, 1\}$  wenn

$$x \in I_{\delta_0}, F(x) \in I_{\delta_1}, \dots, F^n(x) \in \delta_n, \dots$$

Egal wie nah zwei unterschiedliche Punkte  $x', x''$  beieinander liegen, geraten sie in völlig unvorhersagbare Trajektorien nach langer Zeit. Damit ist das durch  $D$  erzeugte dynamische System chaotisch.

**Lösung der Aufgabe 1.3(b)** Man kann weitere Abbildungen nehmen, die  $I_0 = [0, \frac{1}{2})$  und  $I_1 = [\frac{1}{2}, 1)$  in  $[0, 1)$  bijektiv bilden. Ein Beispiel ist die “Zelt-Abbildung” wie Abb.2 gezeichnet.

**Aufgabe 2.1** (20 Punkte) Betrachten Sie die Räuber-Beute-Gleichungen mit intraspezifischer Konkurrenz:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - ex - by) \\ \dot{y} = y(-c - fy + dx), \end{cases}$$

wobei  $a, b, c, d, e, f > 0$  s.d.  $\frac{a}{e} < \frac{c}{d}$  ist. Zeigen Sie, dass  $(\frac{a}{e}, 0) \in \mathbb{R}_+^2$  eine asymptotische stabile Ruhelage ist, die alle Orbits in  $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$  anziehen.

*Hinweis:* sei  $V = V(x, y) = d(\bar{x} \log(x) - x) + b(\bar{y} \log(y) - y)$  für  $\bar{x} = \frac{a}{e}$  und  $\bar{y} = 0$ . Man zeige  $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) > 0$  für alle Lösungskurve  $(x(t), y(t))$  die von  $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$  anfangen und  $V$  erreicht seines Maximum um  $p = (\frac{a}{e}, 0)$ .

**Lösung der Aufgabe 2.1** Es sei  $V = V(x, y) = d(\bar{x} \log(x) - x) + b(\bar{y} \log(y) - y)$  für  $\bar{x} = \frac{a}{e}$  und  $\bar{y} = 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= d(\bar{x} - x)(a - ex - by) + b(\bar{y} - y)(-c - fy + dx) \\ &> d(\bar{x} - x)(e\bar{x} + b\bar{y} - ex - by) + b(\bar{y} - y)(f\bar{y} - d\bar{x} - fy + dx), \end{aligned}$$

für alle  $y \neq \bar{y}$  (d.h.  $y > \bar{y} = 0$ ), wobei wir

$$a - e\bar{x} - b\bar{y} = 0, \quad -c - f\bar{y} + d\bar{x} < 0$$

verwendet haben. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &> d(\bar{x} - x)(e\bar{x} + b\bar{y} - ex - by) + b(\bar{y} - y)(f\bar{y} - d\bar{x} - fy + dx) \\ &= de(\bar{x} - x)^2 + bf(\bar{y} - y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Für  $y = \bar{y}$ , ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= d(\bar{x} - x)(e\bar{x} + b\bar{y} - ex - by) \\ &= de(\bar{x} - x)^2 > 0, \end{aligned}$$

soweit  $x \neq \bar{x}$  ist. Daher ist  $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) > 0$  für alle  $(x, y) \neq (\bar{x}, \bar{y}) := P$ . Aus dem Satz von Lyapunov folgt  $\omega(z) \subset \{P\}$  für alle  $z \in \mathbb{R}_+^2$ . Da jeder positive Orbit von  $z \in \mathbb{R}_+^2$  in einer kompakten Menge eingeschlossen ist, ist  $\omega(z) \neq \emptyset$ . Damit ist  $\omega(z) = \{P\}$  und folglich ist  $P$  eine globale asymptotische stabile Ruhelage in  $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ .

**Aufgabe 3.1** (10 Punkte) Stören Sie die Lotka-Volterra-Gleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases}$$

mit einer kleinen Störung sodass das neue System eine einzige Ruhelage  $P$  in  $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$  besitzt, die alle Orbits die in  $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$  anfangen abstößt, d.h.  $\alpha(x) = \{P\}$  für alle  $x \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ .

**Lösung der Aufgabe 3.1** Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a + ex - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx + fy) \end{cases}$$

Sei  $V = V(x, y) = d(\bar{x} \log(x) - x) + b(\bar{y} \log(y) - y)$ , wobei  $(\bar{x}, \bar{y})$  erfüllt

$$\begin{cases} a + e\bar{x} - b\bar{y} = 0 \\ -c + d\bar{x} + f\bar{y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= d(\bar{x} \frac{\dot{x}}{x} - \dot{x}) + b(\bar{y} \frac{\dot{y}}{y} - \dot{y}) \\ &= d(\bar{x} - x)(a + ex - by) + b(\bar{y} - y)(-c + dx + fy) \\ &\stackrel{(2)}{=} d(\bar{x} - x)(-e\bar{x} + \bar{y} + ex - by) + b(\bar{y} - y)(-d\bar{x} - f\bar{y} + dx + fy) \\ &= -de(\bar{x} - x)^2 - bf(\bar{y} - y)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Da  $V$  um  $(\bar{x}, \bar{y})$  seinen Maximum erreicht, folgt aus (3), dass jeder Orbit von  $(\bar{x}, \bar{y})$  weggeschoben ist. Da  $e, f$  sich beliebig klein wählen lässt, ist es eine  $\varepsilon$ -Störung vom ursprünglichen System.

**Aufgabe 3.2** (30 Punkte) Es sei  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  eine hyperbolische Ruhelage vom dynamischen System  $\dot{x} = f(x)$ , wobei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar in einer Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $\bar{x}$  ist. Es seien  $\varepsilon > 0$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Funktion. Betrachte

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x) := F_\varepsilon(x). \quad (4)$$

Zeigen Sie:

- (i) für ausreichend kleines  $\varepsilon$  besitzt  $F_\varepsilon$  einen eindeutigen Fixpunkt  $\hat{x}$  in einer Umgebung von  $\bar{x}$ . (*Hinweis: Satz von der impliziten Funktion.*)
- (ii) für geeignetes  $\varepsilon$  ist  $\hat{x}$  hyperbolisch mit

$$\dim E^s(A) = \dim E^s(B), \quad \dim E^u(A) = \dim E^u(B), \quad (5)$$

wobei  $A = Df(\bar{x})$ ,  $B = DF_\varepsilon(\hat{x})$ ,  $E^s$  bzw.  $E^u$  Eigenräume von Eigenwerten mit negativen bzw. positiven Reellteilen bezeichnen. (*Hinweis: die Eigenwertfunktion  $EW : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $EW(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  ist eine stetige Funktion, die stetig von Komponenten von Matrix  $M$  abhängt. Betrachte  $C = DF(\bar{x})$ . Dann sind  $A, C$  bzw.  $B, C$  ausreichend nah für geeignetes  $\varepsilon$ .*)

- (iii) die Flüsse erzeugt von  $\dot{x} = f(x)$  und von (4) sind topologisch konjugiert. (*Hinweis: Satz von Hartman-Grobman und die Tatsache: zwei Flüsse  $\phi(x, t) = e^{tA}x$  und  $\psi(x, t) = e^{tB}x$  mit hyperbolischen Matrizen  $A, B$  (d.h.  $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \emptyset$ ) sind genau dann topologisch konjugiert wenn (5) gilt.*)

**Lösung der Aufgabe 3.2** (i) Da  $\bar{x}$  ein hyperbolischer Fixpunkt für  $f$  ist, ist  $A = Df(\bar{x})$  mit  $\det A \neq 0$  ein Isomorphismus. Da die Menge  $\{M \in M_{n \times n} : \det M \neq 0\}$  der nichtsingulären Matrixen eine offene Menge in  $M_{n \times n}$  ist, gibt es ein ausreichend kleines  $\varepsilon > 0$  s.d.

$$B := DF_\varepsilon(\bar{x}) = A + \varepsilon Dg(\bar{x})$$

auch ein Isomorphismus ist. Aus dem Satz der impliziten Funktionen folgt, dass  $F_\varepsilon$  ein lokaler Homöomorphismus um  $\bar{x}$  ist. Damit hat  $F_\varepsilon$  eine eindeutige Nullstelle  $\hat{x}$  in einer Umgebung von  $\bar{x}$ .

(ii) Betrachte die Eigenwertfunktion  $EW : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $EW(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  für  $n \times n$ -Matrixen. Die Stetigkeit von  $EW$  folgt aus der Stetigkeit von charakteristischem Polynom. Da  $A$  hyperbolisch ist, ist  $\lambda \notin i\mathbb{R}$  für alle  $\lambda \in \sigma(A)$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  so klein dass (vgl. Abbildung 3)

$$\mu \notin i\mathbb{R}, \quad \forall \mu \in B_\varepsilon(\lambda), \lambda \in \sigma(A)$$

Wegen der Stetigkeit von  $EW$ , gibt es dann ein  $\delta > 0$  sodass

$$\mu \notin i\mathbb{R}, \quad \forall \mu \in \sigma(\tilde{A}), \|\tilde{A} - A\| < \delta.$$

Andererseits erfüllt  $B = DF_\varepsilon(\hat{x})$  mit geeignetem  $\varepsilon$

$$\|B - A\| < \delta,$$

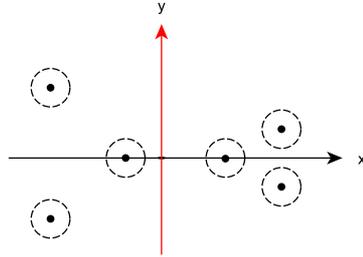


Abbildung 3: Eigenwerte von  $A$  und ihre Umgebungen (vgl. Aufgabe 2.1).

(bedenke: der Abstand von  $A = Df(\bar{x})$  und  $C = Df(\hat{x})$ ; und von  $C = Df(\hat{x})$  und  $B = DF_\varepsilon(\hat{x})$  sind klein wegen der Stetigkeit von  $Df$  und der Definition von  $F_\varepsilon$ ). Damit hat  $B$  für geeignetes  $\varepsilon > 0$ , die gleiche Anzahl von Eigenwerten (algebraische Multiplizität mitgezählt) von der linken Seite der  $i\mathbb{R}$ -Achse als von  $A$ ; und die gleiche Anzahl von Eigenwerten von der rechten Seite der  $i\mathbb{R}$ -Achse als von  $A$ . Damit ist die Aussage bewiesen.

(iii) Mit dem Hinweis sind lineare Flüsse  $\varphi_L(t, \xi) = e^{tA}\xi$  und  $\psi_L(t, \eta) = e^{tB}\eta$  topologisch konjugiert. Aus dem Satz von Hartman-Grobman ist  $\varphi$  von  $f$  mit  $\varphi_L$  topologisch konjugiert; und  $\psi$  von  $F_\varepsilon$  ist mit  $\psi_L$  topologisch konjugiert. Daraus folgt, dass Flüsse von  $f$  und von  $F_\varepsilon$  sind für ausreichend kleines  $\varepsilon > 0$  topologisch konjugiert.

**Aufgabe 3.3** (20 Punkte) Betrachten Sie die Konkurrenz-Gleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - cy) \\ \dot{y} = y(d - ex - fy) \end{cases} \quad \text{für } a, b, c, d, e, f > 0. \quad (6)$$

Zeigen Sie:

- (i) im Fall  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$  folgt jeder Orbit in  $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$  eine Niveau-Linie von  $V(x, y) = xy^{-k}$  mit  $k = \frac{a}{d}$ , d.h.  $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) \equiv 0$ .
- (ii)  $Q(x, y) = be(x - \bar{x})^2 + 2ce(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + cf(y - \bar{y})^2$  ist eine Lyapunov-Funktion für (6), wobei  $(\bar{x}, \bar{y})$  eine Ruhelage von (6) ist.

**Lösung der Aufgabe 3.3 (i)**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(xy^{-k}) &= \dot{x}y^{-k} - kxy^{-k-1}\dot{y} \\ &= xy^{-k}(a - bx - cy) - kxy^{-k-1}y(d - ex - fy) \\ &= xy^{-k}((a - bx - cy) - k(d - ex - fy)). \end{aligned}$$

Da  $k = \frac{a}{d}$  ist und es gilt  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$ , folgt es

$$(a - bx - cy) - k(d - ex - fy) = 0, \quad \forall (x, y).$$

Damit ist  $\frac{d}{dt}(xy^{-k}) \equiv 0$ .

**Lösung der Aufgabe 3.3 (ii)** Es sei  $Q(x, y) = be(x - \bar{x})^2 + 2ce(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + cf(y - \bar{y})^2$ . Dann ist  $\frac{dQ}{dx} = 2be(x - \bar{x}) + 2ce(y - \bar{y})$  und  $\frac{dQ}{dy} = 2cf(y - \bar{y}) + 2ce(x - \bar{x})$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q(x(t), y(t)) &= (2be(x - \bar{x}) + 2ce(y - \bar{y}))x(a - bx - cy) \\ &\quad + (2cf(y - \bar{y}) + 2ce(x - \bar{x}))y(d - ex - fy). \end{aligned}$$

Da  $(\bar{x}, \bar{y})$  eine Ruhelage ist, gilt

$$\begin{cases} a - b\bar{x} - c\bar{y} = 0 \\ d - e\bar{x} - f\bar{y} = 0 \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{cases} a - bx - cy = b(\bar{x} - x) + c(\bar{y} - y) \\ d - ex - fy = e(\bar{x} - x) + f(\bar{y} - y) \end{cases}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q(x(t), y(t)) &= (2be(x - \bar{x}) + 2ce(y - \bar{y}))x(b(\bar{x} - x) + c(\bar{y} - y)) \\ &\quad + (2cf(y - \bar{y}) + 2ce(x - \bar{x}))y(e(\bar{x} - x) + f(\bar{y} - y)) \\ &= -2b^2ex(x - \bar{x})^2 - 4bce(x - \bar{x})(y - \bar{y}) - 2c^2ex(y - \bar{y})^2 \\ &\quad - 4cefy(x - \bar{x})(y - \bar{y}) - 2cf^2y(y - \bar{y})^2 - 2ce^2y(x - \bar{x})^2 \\ &= -2ex(b^2(x - \bar{x})^2 + 2bc(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + c^2(y - \bar{y})^2) \\ &\quad - 2cy(e^2(x - \bar{x})^2 + 2ef(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + f^2(y - \bar{y})^2) \\ &= -2ex(b(x - \bar{x}) + c(y - \bar{y}))^2 - 2cy(e(x - \bar{x}) + f(y - \bar{y}))^2 \leq 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.4** (10 Punkte) Beweisen Sie jeder Orbit eines 2-dimensionalen Konkurrenz-Systems konvergiert entweder eine Ruhelage oder gegen  $\infty$ .

**Lösung der Aufgabe 3.4** Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

mit  $\frac{\partial f}{\partial y} \leq 0$  und  $\frac{\partial g}{\partial x} \leq 0$ . Es sei  $v(t) := (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  die Geschwindigkeitsrichtung um  $(x(t), y(t))$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

Es seien

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, y) : x, y \geq 0\} \\ C_2 &= \{(x, y) : x \leq 0, y \geq 0\} \\ C_3 &= \{(x, y) : x, y \leq 0\} \\ C_4 &= \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 0\}. \end{aligned}$$

Ist  $v(t_0) \in C_2$  bzw.  $C_4$ , so bleibt  $v(t) \in C_2$  bzw.  $C_4$  für alle  $t \geq t_0$ .

Ist  $v(t_o) \in C_1$ , so sind zwei Möglichkeiten: entweder  $v(t)$  bleibt in  $C_1$  für alle  $t \geq t_o$  oder es verlässt  $C_1$  nach endlicher Zeit  $t_N$  und landet in  $C_2$  (oder  $C_4$ ) für alle  $t \geq t_N$ . In Kürze,  $(x, y) = (x(t), y(t))$  für  $t \geq t_N$  ist monoton nach endlicher Zeit. Ähnlich gilt für wenn  $v(t_o) \in C_3$ .

Daher muss  $\{(x(t), y(t)) : t \geq t_o\}$ , als eine (letztendlich) monotone Folge, gegen einen Grenzwert, also eine Ruhelage, oder gegen  $\infty$  konvergieren.

**Aufgabe 4.1** (20 Punkte) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

für jedes  $\sigma \in \mathbb{R}$  einen Fluss auf dem Torus  $T^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  induziert. Man bestimme für jedes  $\sigma$  die  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmengen für alle Orbits.

**Lösung der Aufgabe 4.1** Die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

induziert auf  $T^2$  den Fluss

$$\varphi(x, y, t) = (x + t \pmod{1}, y + \sigma t \pmod{1})$$

Falls  $\sigma \in \mathbb{Q}$ , sei  $\sigma = \frac{p}{q}$  für teilerfremde  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $q > 0$ . Ist  $\sigma \neq 0$ , so ist  $q$  eindeutig. Es gilt

$$\begin{cases} x(q) = x + q = x \pmod{1} \\ y(q) = y + \frac{p}{q}q = y + p = y \pmod{1} \end{cases}$$

damit ist jeder Orbit von jedem Punkt  $(x, y)$   $q$ -periodisch. Für  $\sigma = 0$ , ist jeder 1-periodisch. Daraus folgt, dass

$$\omega(x, y) = \alpha(x, y) = \mathcal{O}(x, y)$$

der geschlossene  $q$ -periodische Orbit ist.

Falls  $\sigma \notin \mathbb{Q}$ , zeigen wir

$$\omega(x, y) = \alpha(x, y) = T^2$$

für alle  $(x, y) \in T^2$ . Wir geben einen Beweis für  $\omega(x, y) = T^2$ , der Fall für  $\alpha(x, y)$  ist analog. Es sei  $\varphi$  der erzeugte Fluss.

Angenommen es gibt ein  $(x, y) \in T^2$  mit  $\omega(x, y) \subsetneq T^2$ . Da  $\omega$ -Limitsmenge immer abgeschlossen ist, ist  $T^2 \setminus \omega(x, y)$  eine nichtleere offene Menge. Nehme eine offene Teilmenge  $U$  davon (eine kleine Umgebung von einem Punkt  $p$  z.B.). Sei  $-t_o \leq 0$  die erste Rückkehrzeit für  $p$  zur  $x$ -Achse (vgl. Abb. 4). Definiere

$$U_1 = \varphi(U, -t_o) \cap \{x\text{-Achse}\}.$$

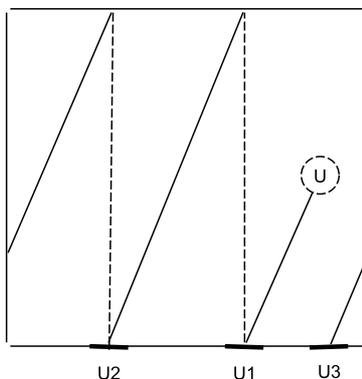


Abbildung 4: Beweis für dichte Orbits auf  $T^2$  (vgl. Aufgabe 5.3).

Da  $U \cap \omega(x, y) = \emptyset$  ist, ist  $U \cap \mathcal{O}^+(x, y) = \emptyset$  und wegen der Definition von  $U_1$ , ist  $U_1 \cap \mathcal{O}^+(x, y) = \emptyset$  (hier ist wichtig  $-t_o \leq 0$ ). Weiter definiere

$$U_{k+1} = \varphi(U_k, -\frac{1}{\sigma}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

wobei  $-\frac{1}{\sigma} < 0$  die erste Rückkehrzeit für  $U_k$  zur  $x$ -Achse ist. Für alle  $k \geq 1$ , gilt

$$U_k \cap \mathcal{O}^+(x, y) = \emptyset$$

und alle  $U_k$ 's sind der gleiche Länge und "gleichmäßig" auf  $[0, 1]$  verteilt, d.h.

$$|U_k| = |U_{k'}|, \quad |p_{k+1} - p_k| = |p_{k'+1} - p_{k'}| \pmod{1}, \quad \forall k, k' \geq 1,$$

wobei  $p_k$  der Mittelpunkt von  $U_k$  bezeichnet. Wiederholt die Iteration, so gibt sich  $\{U_k\}_{k=1}^N$  eine endliche offene Überdeckung für  $[0, 1]$  und folglich ist

$$\mathcal{O}^+(x, y) \cap [0, 1] = \emptyset,$$

offenbar ein Widerspruch für jeden Punkt  $(x, y)$  auf  $T^2$ .

**Aufgabe 4.2** (30 Punkte) Ergänzen Sie den Beweis vom Satz von Poincaré über die Stabilität der periodischen Orbits. Zu zeigen sind:

(i) Ist  $\gamma$  stabil, so ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } |P^n(x) - x_o| < \varepsilon \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_o| < \delta.$$

(ii) Ist  $\gamma$  asymptotisch stabil, so ist  $\gamma$  stabil und

$$\exists \text{ Umg. } U \text{ von } x_o \text{ in } S \text{ s.d. } P^n(x) \rightarrow x_o \text{ als } n \rightarrow \infty \text{ für alle } x \in U.$$

(iii) Ist  $\gamma$  instabil, so existiert ein  $x \in S$  mit  $P^{-n}(x) \rightarrow x_o$  als  $n \rightarrow \infty$ .

**Lösung der Aufgabe 4.2** Es seien  $\gamma$  ein periodischer Orbit,  $x_o \in \gamma$  und  $P : S \rightarrow S$  sei die Poincaré-Abbildung auf einem Schnitt  $S$  um  $x$ .

(i) Nach der Definition von Stabilität von  $\gamma$ , gilt

$$\forall \text{Umg. } U \supset \gamma \exists \text{Umg. } V \supset \gamma \text{ s.d. } \mathcal{O}^+(x) \subset U \text{ für alle } x \in V.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann ist

$$U = \bigcup_{y \in \gamma} B_\varepsilon(y)$$

eine Umgebung von  $\gamma$  und dafür existiert eine Umgebung  $V$  von  $\gamma$  s.d. für alle  $x \in V$  gilt  $\mathcal{O}^+(x) \subset U$ . Aus  $V$  definieren wir

$$\delta = \sup\{\eta > 0 : B_\eta(y) \subset V, \forall y \in \gamma\},$$

wegen der Kompaktheit von  $\gamma$ , ist  $\delta > 0$ . Betrachte nun einen beliebigen Punkt  $x \in S$  mit  $|x - x_o| < \delta$ . Dann ist  $x \in B_\delta(x_o) \subset V$  wegen der Definition von  $\delta$ . Da  $\gamma$  stabil ist, gilt für  $x$  ja

$$\mathcal{O}^+(x) \subset U = \bigcup_{y \in \gamma} B_\varepsilon(y),$$

und Schnitt mit  $S$  auf die beiden Seiten führt zu

$$\{P^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} = (\mathcal{O}^+(x) \cup S) \cap S \subset \left( \bigcup_{y \in \gamma} B_\varepsilon(y) \cup S \right) \cap S = B_\varepsilon(x_o),$$

d.h.  $|P^n(x) - x_o| < \varepsilon$ .

(ii) Da  $\gamma$  asymptotisch stabil ist, ist er stabil und attraktiv, wobei "attraktiv" bedeutet

$$\exists \text{Umg. } \tilde{U} \text{ von } \gamma \text{ s.d. } \omega(x) \subset \tilde{U}, \text{ für alle } x \in \tilde{U}.$$

Da  $\gamma$  ein geschlossener Orbit ist und da  $\omega(x)$  invariant ist, muss " $\subset$ " " $=$ " sein, d.h.

$$\exists \text{Umg. } \tilde{U} \text{ von } \gamma \text{ s.d. } \omega(x) = \gamma, \text{ für alle } x \in \tilde{U}.$$

Es sei  $U = \tilde{U} \cap S$  und betrachte einen beliebigen Punkt  $x \in U$ . Angenommen, dass es  $x \in U$  gäbe, s.d.  $P^n(x) \not\rightarrow x_o$  als  $n \rightarrow \infty$ . Dann heißt

$$\exists \varepsilon_o > 0 \forall N > 0 \exists n > N \text{ s.d. } |P^n(x) - x_o| > \varepsilon_o.$$

Da andererseits aber  $P^n(x) \subset \mathcal{O}^+(x)$  ist, erhalten wir dann

$$x_o \notin \omega(x),$$

ein Widerspruch gegen  $\omega(x) = \gamma \ni x_o$ .

(iii) Ist  $\gamma$  instabil, so ist  $x_o \in S$  ein instabiler Fixpunkt für  $P$  wegen (i) vom Satz von Poincaré. Es bedeutet

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in S \text{ mit } |x - x_o| < \delta \text{ und } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |P^N(x) - x_o| > \varepsilon.$$

Ist  $\delta = \varepsilon$ , so erfüllt das entsprechend  $x$

$$|P^N(x) - x_o| > \varepsilon > |x - x_o|.$$

Mit  $y = P^N(x)$  ist es

$$|P^{-N}(y) - x_o| < |y - x_o|$$

Folglich ist  $P^{-N}$  (damit auch  $P^{-1}$ ) verwendet auf  $y$  eine Kontraktion. Damit ist (iii) bewiesen.

**Aufgabe 4.3** (20 Punkte) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine  $C^2$ -Abbildung auf dem Einheitsintervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  mit  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  und  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ . Betrachte das diskrete System erzeugt von  $x \mapsto f(x)$  und die Stabilität von Fixpunkten  $\bar{x} = 0$  und  $\bar{x} = 1$ . Zeigen Sie:

- (i) ist  $f''(x) > 0$  für all  $x \in [0, 1]$ , so ist 0 ein stabiler Fixpunkt und 1 ein instabiler Fixpunkt;
- (ii) ist  $f''(x) < 0$  für all  $x \in [0, 1]$ , so ist 1 ein stabiler Fixpunkt und 0 ein instabiler Fixpunkt.

*Hinweis: ein bild sagt mehr als tausend worte.*

### Lösung der Aufgabe 4.3

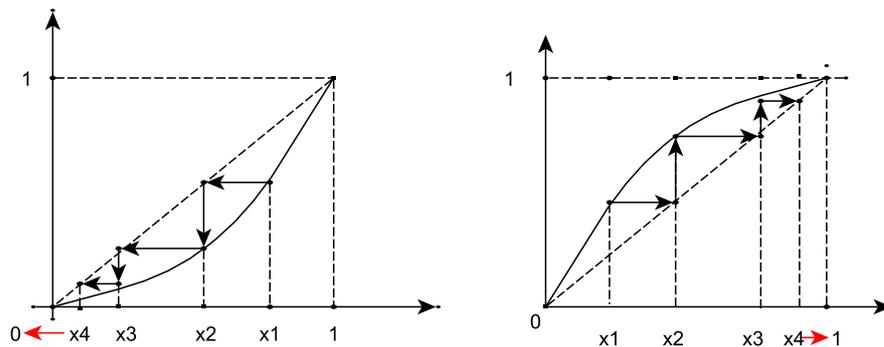


Abbildung 5: Ein Spinnengewebe für (link)  $f'' > 0$  und (recht)  $f'' < 0$  (vgl. Aufgabe 3.4).

**Aufgabe 4.4** (30 Punkte) Betrachte das 2D-System in Polarkoordinaten  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} \dot{r} = ar(1-r) \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

und den periodischen Orbit  $\gamma = \{(r, \theta) : r = 1, \theta \in \mathbb{R}\}$ .

- (i) Definieren Sie einen linearen Schnitt  $S$  für  $\gamma$  um  $x_o = (1, 0)$ , der senkrecht zu  $\gamma$  ist.

- (ii) Definieren Sie die Poincaré-Abbildung  $P : S \rightarrow S$  auf  $S$ .  
*Hinweis:*  $r(t) = \frac{r_o}{r_o + (1-r_o)e^{-at}}$  gibt die Lösung für Anfangswert  $r(0) = r_o$  an.  
 Man begründe die erste Rückkehrzeit ist  $2\pi$ .
- (iii) Bestimmen Sie durch die Poincaré-Abbildung  $P$  die Stabilität von  $\gamma$ .  
*Hinweis:* Aufgabe 4.3.

**Lösung der Aufgabe 4.4** Definiere

$$S = \{(r, \theta) : r \in \mathbb{R}_+, \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}\} \simeq \mathbb{R},$$

welches ein senkrechter Schnitt um  $(1, 0)$  ist.

Durch die Trennung der Variable, findet man Lösung

$$r(t) = \frac{r_o}{r_1 + (1-r_o)e^{-at}}, \quad \theta(t) = \theta_o + t.$$

Da die erste Rückkehrzeit  $2\pi$  ist (wegen der Definition von  $S$  und  $2\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ), ist die Poincaré-Abbildung  $P : S \rightarrow S$  definiert von

$$P : (r, 0) \mapsto \left( \frac{r}{r + (1-r)e^{-2\pi a}}, 2\pi \equiv 0 \pmod{2\pi} \right) := (f(r), 0).$$

Man sieht  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  erfüllt  $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$ . Nach der Aufgabe 3.4, ist 1 ein stabiler Fixpunkt für  $f$  wenn  $f''(r) \leq 0$  und asymptotisch stabil, wenn  $f''(r) < 0$  für ist. Nach der Berechnung ist

$$f''(r) = -\frac{2e^{-2\pi a}}{(r + (1-r)e^{-2\pi a})^3}(1 - e^{-2\pi a}),$$

damit ist  $f''(r) < 0$  bzw.  $f''(r) = 0$  bzw.  $f''(r) > 0$  g.d.w.  $a > 0$  bzw.  $a = 0$  bzw.  $a < 0$  ist. Daher ist  $\gamma$  stabil wenn  $a \geq 0$  ist; asymptotisch stabil wenn  $a > 0$  ist und instabil wenn  $a < 0$  ist.

**Aufgabe 4.5** (20 Punkte) Betrachte  $\dot{x} = -(\mu^2 x + x^3)$  für  $\mu, x \in \mathbb{R}$  um  $\mu_o = 0$ . Ist  $\mu_o$  ein Bifurkationswert von  $\mu$  im Sinn von Definition (a) und/oder von Definition (b)? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung der Aufgabe 4.5**  $\mu_o = 0$  ist ein Bifurkationswert von  $\mu$  im Sinn von Definition 2.1.a aber nicht nach Definition 2.1.b. Für  $\mu_o = 0$ , ist das System  $\dot{x} = -x^3$  nicht strukturell stabil, da  $x = 0$  ein nicht hyperbolischer Fixpunkt des Systems ist und ein System mit nicht hyperbolischen Fixpunkten kann nicht strukturell stabil sein. Nach der Definition der strukturellen Stabilität, findet man in jeder Umgebung des Systems zwei topologisch nicht äquivalente Systeme, damit ist  $\mu_o = 0$  nach der Definition (a) ein Bifurkationswert.

Nach der Definition(b) muss man nur die parametrisierte Familie der Systeme allein betrachten. Man sieht das System  $\dot{x} = -(\mu^2 x + x^3)$  hat für  $\mu \neq 0$  immer einen einzigen Fixpunkt  $x = 0$  und der ist asymptotisch stabil. Für  $\mu = 0$  bleibt diese Dynamik die gleich, nämlich  $x = 0$  ist der einzige Fixpunkt und er ist asymptotisch stabil (nur mit schwächerem Anziehungskraft).

**Aufgabe 5.1** (10 Punkte) Es sei  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  die Hufeisen-Abbildung. Mithilfe der symbolischen Dynamik zeigen Sie es gibt  $x \in \Lambda$  sodass der Orbit  $O(x)$  von  $x$  eine dichte Menge in  $\Lambda$  ist.

*Hinweis: die Menge aller periodischen Punkte ist dicht in  $\Lambda$ .*

**Lösung der Aufgabe 5.1** Wie in der Vorlesung gezeigt ist  $(\Lambda, f)$  topologisch äquivalent zu  $(\Sigma, s)$ , wo  $\Sigma$  die Menge aller bi-unendlichen Folge und  $s : \Sigma \rightarrow \Sigma$  der 1-Shift nach links bezeichnen. Wir konstruieren eine Folge  $a \in \Sigma$  mit der gewünschten Eigenschaft durchs Zusammenflicken von endlichen Folgen. Man schreibt zuerst alle periodische "Schnitte" endlicher Länge aus periodischen Punkten:

$P_1 :$	1	11	111	1111	...
	2	22	222	2222	...
$P_2 :$	12	1212	121212	12121212	...
	21	2121	212121	21212121	...
$P_3 :$	112	112112	112112112	112112112112	...
	121	121121	121121121	121121121121	...
	122	122122	122122122	122122122122	...
	211	211211	211211211	211211211211	...
	212	212212	212212212	212212212212	...
	221	221221	221221221	221221221221	...
$\vdots$	...	...	...	...	...

Nach zunehmender Länge flickt man die oben gesammelten Folge zusammen:

1 2 11 22 12 21 111 222 112 121 122 211 212 221 1111 2222 1212 2121 ...

Durch Spiegelung nennt man

$a := \dots 221 212 211 122 121 112 222 111 21 12 22 11 2 1 2 11 22 12 21 111 222 112 121 122 211 212 221 \dots$

Nun für jeden Punkt  $x \in \Sigma$  und jeden angegebenen Abstand  $\varepsilon > 0$  findet man entsprechenden endlichen "Schnitt" aus  $x$ :

$$\bar{x} := x_{-N}x_{-N+1} \dots x_0x_1x_2 \dots x_N$$

sodass alle  $y \in \Sigma$  mit  $y_i = x_i$  für  $|i| \leq N$  ist im Abstand  $< \varepsilon$  von  $x$ . Dieses  $\bar{x}$  kommt auch in der List vor, spätestens in  $P_{2N+1}$  wenn nicht früher. Demnach ist  $\bar{x}$  auch in  $a$  enthalten. Durchs Schieben nach links, sagen wir  $\tilde{N}$  mal, kommt  $\bar{x}$  dann als das "Mittelstück" für  $s^{\tilde{N}}(a)$  vor. Das heißt für  $b = s^{\tilde{N}}(a)$  gilt  $b_i = x_i$  für  $|i| \leq N$ . Folglich ist

$$d(x, s^{\tilde{N}}(a)) < \varepsilon.$$

Damit ist der Orbit von  $a$  dicht in  $\Sigma$ .

**Aufgabe 5.2** (20 Punkte) Betrachte das System

$$\begin{cases} \dot{r} = -\mu^2 r - r^3 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

in den Polarkoordinaten für  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  in  $\mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie damit, dass die Existenz eines rein imaginären kritischen Eigenwertes im Allgemein fürs Ereignis der Bifurkation der periodischen Orbits nicht ausreichend ist.

**Lösung der Aufgabe 5.2** In  $(x, y)$ -Koordinaten umgeschrieben ist das System

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu^2 x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - \mu^2 y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

Der Punkt  $(0, 0)$  ist für jedes  $\mu$  eine Ruhelage und dessen Linearisierung ist

$$D_{(x,y)}f(0,0) = \begin{pmatrix} -\mu^2 & -1 \\ 1 & -\mu^2 \end{pmatrix}$$

Sie hat Eigenwerten  $-\mu^2 \pm i$  und werden  $\pm i$  (also rein imaginär) als  $\mu = 0$  ist. Trotzdem tritt keine Bifurkation ein als  $\mu$   $\mu_o = 0$  überschreitet. Da

$$\dot{r} = -\mu^2 r - r^3 = r(-\mu^2 - r^2)$$

ist, bleibt  $0$  eine global asymptotisch stabile Ruhelage für alle  $\mu$ . Damit ist keine Bifurkation vorhanden.

**Aufgabe 5.3** (40 Punkte) (Nichteindeutigkeit der Zentrumsmanigfaltigkeit) Betrachte das System

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

wobei  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie:

- (i)  $0 = (0, 0)$  ist ein Fixpunkt und der Zentrumseigenraum  $E_0^c$  ist die  $x$ -Achse.
- (ii) Die Lösung für Anfangswert  $(x_o, y_o)$  befinden sich auf dem Graph der Funktion  $y(x) = (y_o e^{-\frac{1}{x_o}}) e^{\frac{1}{x}}$  in  $\mathbb{R}^2$ .  
(Hinweis: man löse die zwei Gleichungen unabhängig von ein anderen und eliminiere das Variabel  $t$  von  $x = x(t)$  und  $y = y(t)$ .)
- (iii) Welche Graphen aus (ii) tendieren zu  $0$  und sind tangential zu  $E_0^c$  um  $0$ ?  
(Hinweis: die zwei Fälle  $x < 0$  und  $x \geq 0$  getrennt betrachten.)
- (iv) Wie viele Zentrumsmanigfaltigkeiten besitzen das System um  $0$ ? Zeichnen Sie sie.

**Lösung der Aufgabe 5.3** Offensichtlich ist  $(0, 0)$  ein Fixpunkt mit Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist  $E_0^c = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  die  $x$ -Achse. Die Lösungen haben die Form

$$x(t) = \frac{x_o}{1 - tx_o}, \quad y(t) = y_o e^{-t}.$$

Es folgt, dass die Lösungskurven Graphen von

$$y(x) = (y_o e^{-\frac{1}{x_o}}) e^{\frac{1}{x}}$$

sind. Ist  $x < 0$  so tendiert  $(x, y) = (x(t), y(t))$  zu  $(0, 0)$  als  $t \rightarrow \infty$  für alle  $x_o, y_o$ . Ist  $x > 0$  so ist  $(x, y) = (x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$  als  $t \rightarrow \infty$  nur wenn  $y_o = 0$ . Das System um  $(0, 0)$  besitzt unendlich viele Zentrumsmanigfaltigkeiten wie in Abb. 6 gezeigt.

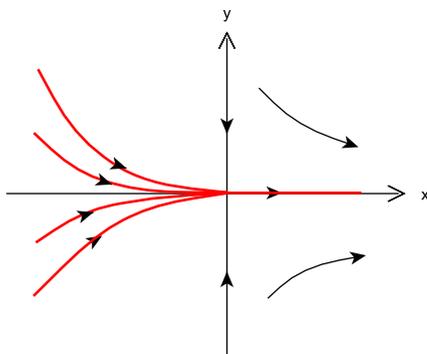


Abbildung 6: Zentrumsmanifoldtheorie um  $(0,0)$  (vgl. Aufgabe 8.1).

**Aufgabe 5.4** (20 Punkte) Zeigen Sie:

- (i) ist  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  ein  $C^r$ -Atlas von einer topologischen Mannigfaltigkeit  $M$ , so ist die  $C^r$ -differenzierbare Struktur von  $M$ , die mit  $\mathcal{A}$  verträglich ist, eindeutig gegeben von

$$\mathcal{B} = \{(U, \varphi) : \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \text{ und } \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ sind } C^r, \forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}\}$$

- (ii) sind  $\mathcal{A}_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  und  $\mathcal{A}_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  zwei Atlasse von  $M$  und ist jede Karte von  $\mathcal{A}_1$  verträglich mit jeder Karte von  $\mathcal{A}_2$ , so definieren  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  eine gleiche differenzierbare Struktur von  $M$ .

**Lösung der Aufgabe 5.4(i)** Wir zeigen zuerst, dass  $\mathcal{B}$  ein Atlas ist. Seien  $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{B}$ , d.h.  $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ \psi^{-1}, \psi \circ \varphi_\alpha^{-1}$  sind  $C^r$ , für alle  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ . Dann ist

$$\varphi \circ \psi^{-1} = (\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \psi^{-1})$$

auch  $C^r$ , für alle  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ . Weiter nach der Definition enthält  $\mathcal{B}$  alle Karten, die verträglich mit  $\mathcal{A}$  sind. Damit ist  $\mathcal{B}$  eine  $C^r$ -differenzierbare Struktur von  $M$ .

**Lösung der Aufgabe 5.4(ii)** Sei  $\mathcal{B}_1$  bzw.  $\mathcal{B}_2$  die  $C^r$ -differenzierbare Struktur von  $M$  definiert durch  $\mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{A}_2$  (vgl. (i)). Wir zeigen  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ .

Es sei  $(U, \varphi) \in \mathcal{B}_1$ , d.h.  $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$  sind  $C^r$ , für alle  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}_1$ . Dann gilt für alle  $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{A}_2$ ,

$$\psi_\beta \circ \varphi^{-1} = (\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})$$

$C^r$  ist (da  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  verträglich sind, ist  $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  auch  $C^r$ ). Folglich ist  $(U, \varphi) \in \mathcal{B}_2$ .

Ähnlich zeigt man  $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2$ . Daher ist  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ .

**Aufgabe 5.5** (10 Punkte) Zeigen Sie der Einheitskreis  $S^1$  ist eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ .

**Lösung der Aufgabe 5.5** Es sei  $p = (x, y) \in S^1$  mit  $x > 0$ . Definiere eine Umgebung von  $p$  in  $\mathbb{R}^2$

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, |y| < 1\},$$

und eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow U' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -\sqrt{1-y^2}, |y| < 1\} \\ (x, y) &\mapsto (x - \sqrt{1-y^2}, y), \end{aligned}$$

(vgl. Abb. 7).

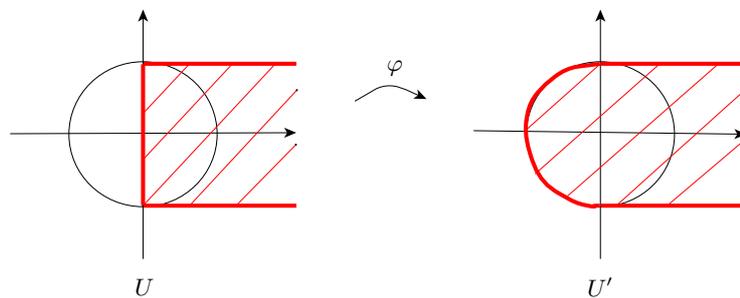


Abbildung 7: Abb.  $U$  und  $\varphi$

Dann ist  $\varphi(S^1 \cap U) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, |y| < 1\} = U' \cap \mathbb{R}$ .

Ähnlich zeigt man für  $p = (x, y)$  mit  $x < 0, y > 0, y < 0$ .

**Aufgabe 6.1** (20 Punkte) In der Menge  $M_{2 \times 2}$  aller reellen  $2 \times 2$ -Matrizen, bestimmen Sie explizit Teilmengen von Matrizen  $A$  s.d.

- (i)  $A$  die jordanische Normalform  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  hat;
- (ii)  $A$  die jordanische Normalform  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  hat.

Zeigen Sie, dass jede Teilmenge eine Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^4$  ist und Bestimmen Sie ihre Codimensionen.

(*Hinweis:* man stelle zuerst  $A$  als Nullstellen einer Funktion von  $\mathbb{R}^4$  nach  $\mathbb{R}^m$  für gewisse Ganzzahl  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq 4$ , dann wende den Satz der impliziten Funktionen.)

**Lösung der Aufgabe 6.1** Es sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$ . Die Matrix  $A$  hat Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  als Lösung von

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0,$$

wobei  $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$  und  $\lambda_1 \lambda_2 = ad - bc$ .

(i)  $A$  hat die jordanische Normalform  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Da  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  ist, ist

$$a + d = 0, \quad ad - bc = 0.$$

Weiter soll es ausgeschlossen sein, dass die geometrische Multiplizität von 0 zwei ist, d.h.  $A$  soll nicht die jordanische Normalform  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  haben. Aber man sieht die einzige Matrix die jordanische Normalform  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  hat, ist die Nullmatrix selbst (da  $P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  für alle Übergangsmatrizen  $P \in M_{2 \times 2}$  ist). Das heißt, die Teilmenge von Matrizen die jordanische Normalform  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  haben ist

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = 0, \quad ad - bc = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0 \right\}.$$

Definiere  $F : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$F : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + d \\ ad - bc \end{pmatrix}.$$

Damit ist  $S \subset F^{-1}(0)$ . Außerdem gilt für alle  $A \in S$ ,  $DF(A) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben von

$$DF(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix},$$

welche voller Rang ist (da  $A \in S$  ist). Aus dem Satz der impliziten Funktion folgt, dass  $S$  eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 2, also co-Dimension 2, ist.

(ii)  $A$  hat die jordanische Normalform  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Wie bereit in (iii) geklärt, ist die Nullmatrize die einzige Matrix die jordanische Normalform  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  hat. Damit ist die entsprechende Teilmenge von

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Folglich ist  $S$  eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 0 (co-Dimension 4).

**Aufgabe 6.2** (10 Punkte) Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

um  $(0, 0)$ . Zeigen Sie  $W^c = \{(x, y(x)) : x \in \mathbb{R}\}$  mit

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2x^2}} \left( C + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n \cdot n! \cdot x^{2n}} \right)$$

ist für jedes  $C \in \mathbb{R}$  eine Zentrumsmannigfaltigkeit fürs System um  $(0, 0)$ , die um  $(0, 0)$  nicht analytisch ist.

*Hinweis: Variation der Konstanten für  $\frac{dy}{dx} = \frac{-y+x^2}{-x^3}$ .*

**Lösung der Aufgabe 6.2** Betrachte

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y(x) + b(x),$$

wobei  $A(x) = \frac{1}{x^3}$  und  $b(x) = -\frac{1}{x}$ . Die homogene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y(x)$$

hat Lösungen der Form

$$y(x) = Ce^{\int_{x_0}^x A(t)dt} = Ce^{-\frac{1}{2x^2}}$$

Variation der Konstanten: setze  $y(x) = C(x)e^{-\frac{1}{2x^2}}$  in die inhomogene Gleichung ein und bekomme

$$C(x)' = b(x)e^{\frac{1}{2x^2}} = -\frac{e^{\frac{1}{2x^2}}}{x}.$$

Es folgt

$$C(x) = \int -\frac{e^{\frac{1}{2x^2}}}{x} dx = \int \frac{e^u}{2u} du,$$

wobei  $u = \frac{1}{2x^2}$  und  $du = -\frac{1}{x^3} dx$ . Die Formel

$$\int \frac{e^{cx}}{x} dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cx)^n}{n \cdot n!} + C$$

zu verwenden führt zu

$$C(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n \cdot n! \cdot x^{2n}} + C.$$

Jede Zentrumsmannigfaltigkeit davon ist um  $(0, 0)$  nicht analytisch, da  $e^{-\frac{1}{2x^2}}$  (auch wenn multipliziert von  $x^{-n}$  oder  $\ln(x^{-m})$ ) nicht analytisch ist.

**Aufgabe 6.3** (60 Punkte) Finden Sie eine geeignete Approximation der Zentrumsmannigfaltigkeit um 0 und zeichnen Sie damit das Phasenportrait um 0, für

- (i)  $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -y + \alpha x \end{cases}$ , wobei  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist.
- (ii)  $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 + xy \end{cases}$ , wobei  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist.
- (iii)  $\begin{cases} \dot{x} = -y + xz \\ \dot{y} = x + yz \\ \dot{z} = -z - (x^2 + y^2) + z^2 \end{cases}$ , wobei  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ist.

(Hinweis: für (i) und (ii) hängt die Approximation und das Phasenportrait von  $\alpha$  ab ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha < 0$  oder  $\alpha = 0$ .)

**Lösung der Aufgabe 6.3 (i)** Das System lässt sich umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es sei  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$ . Das Spektrum von  $J$  ist

$$\sigma(J) = \{0, -1\}$$

mit Eigenräumen gegeben von  $E(0) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \rangle$ ,  $E(-1) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ . Ist

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

(somit  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$ ), so ist  $J$  diagonalisiert:

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es sei  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , d.h.  $x = u$  und  $y = \alpha u + v$ . Damit ist

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = JP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(\alpha u + v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder äquivalent,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= P^{-1}JP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} u(\alpha u + v) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(\alpha u + v) \\ -\alpha u(\alpha u + v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da  $E^c$  die  $u$ -Achse ist, ist

$$W^c = \{(u, v) : v = h(u)\}, \quad \text{für } h : E^c \rightarrow E^s.$$

Es seien  $B = 0$ ,  $C = -1$ ,  $f(u, v) = u(\alpha u + v)$  und  $g(u, v) = -\alpha u(\alpha u + v)$ . Dann erfüllt  $h = h(u)$  die Gleichung

$$\begin{aligned} h' \cdot (B \cdot u + f(u, h)) - C \cdot h - g(u, h) &= 0 \\ \Rightarrow h' \cdot u(\alpha u + h) + h + \alpha u(\alpha u + h) &= 0. \end{aligned}$$

Es sei  $h(u) = au^2 + bu^3 + \dots$ , dann ist

$$(2au + 3bu^2 + \dots)u(\alpha u + au^2 + bu^3 + \dots) + au^2 + bu^3 + \dots + \alpha u(\alpha u + au^2 + bu^3 + \dots) = 0.$$

Der  $u^2$ -Koeffizient ist  $a + \alpha^2 = 0$ , damit ist  $a = -\alpha^2$ . Ist  $\alpha \neq 0$ , so ist

$$h(u) = -\alpha^2 u^2 + O(u^3).$$

Weiter ist die Dynamik auf  $W^c$  gegeben von (vgl. Abb. 8)

$$\dot{u} = u(\alpha u + h) = \alpha u^2 + O(u^3), \quad u \in E^c$$

Um alles in  $(x, y)$ -Ebene umzusetzen, genügt es  $u$ - und  $v$ -Achsen in  $(x, y)$ -Ebene

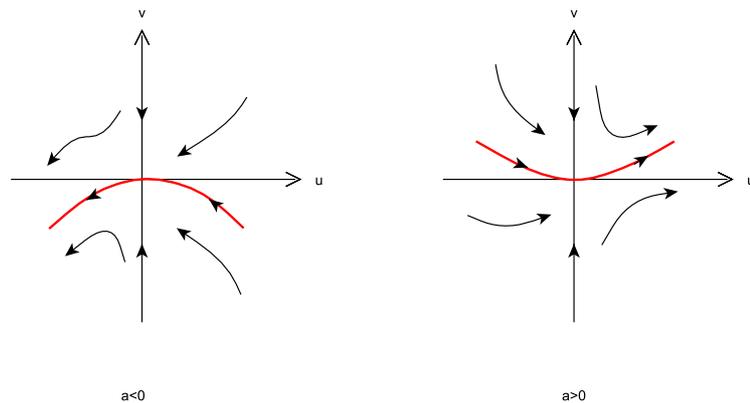


Abbildung 8: Phaseportrait für Aufgabe 6.3(i) in  $(u, v)$ -Ebene im Fall von  $\alpha < 0$  (links) bzw.  $\alpha > 0$  (rechts).

umzusetzen. Man sieht in der ursprünglichen  $(x, y)$ -Ebene, ist die  $u$ -Achse der Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$  und die  $v$ -Achse der Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (vgl. Abb. 9). Damit kann man alles (sowohl  $W^c$  als auch Dynamik auf  $W^c$  und die gesamte Dynamik) von  $(u, v)$  nach  $(x, y)$  transportieren, wie gezeigt in Abb. 9.

Falls  $\alpha = 0$ , ist  $x$ -Achse selbst der Zentrumseigenraum und die Zentrumsmannigfaltigkeit  $W^c$ , wobei  $\dot{x} = 0$  die Dynamik auf  $W^c$  beschreibt (vgl. Abb. 10). Das heißt, jeder Punkt von  $x$ -Achse ist eine Ruhelage. Ist  $\alpha = 0$  ein Bifurkationswert von  $\alpha$  (wenn wir  $\alpha$  als Bifurktionsparameter betrachten)? Wenn ja, was für ein Typ?

**Lösung der Aufgabe 6.3 (ii)** Das System lässt sich umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x^2 - y^2 \\ x^2 + xy \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ist bereits diagonal. Da  $E^c$  die  $x$ -Achse ist, ist

$$W^c = \{(x, y) : y = h(x)\}, \quad \text{für } h : E^c \rightarrow E^s.$$

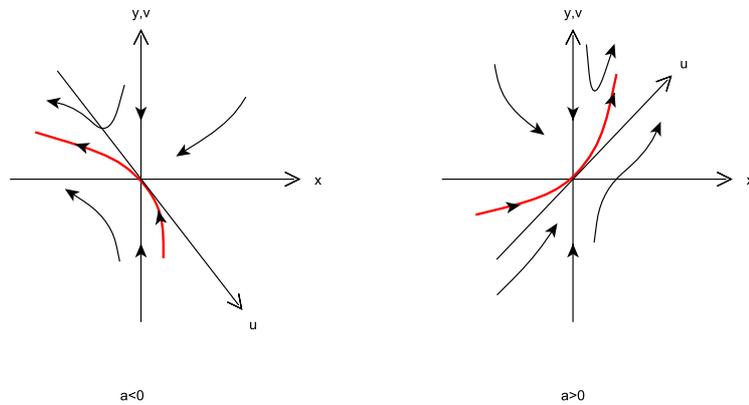


Abbildung 9: Phaseportrait für Aufgabe 6.3(i) in  $(x, y)$ -Ebene im Fall von  $\alpha < 0$  (links) bzw.  $\alpha > 0$  (rechts).

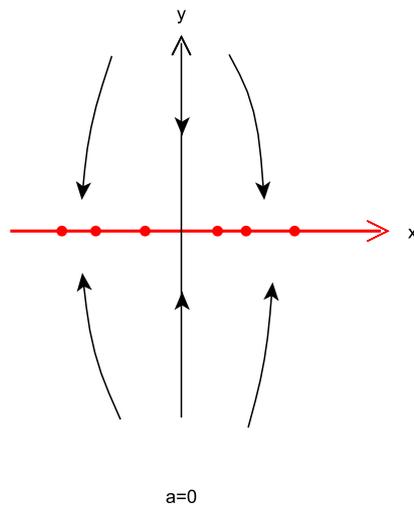


Abbildung 10: Phaseportrait für Aufgabe 6.3(i) in  $(x, y)$ -Ebene im Fall von  $\alpha = 0$ .

Setze  $B = 0$ ,  $C = -1$ ,  $f(x, y) = \alpha x^2 - y^2$  und  $g(x, y) = x^2 + xy$  in

$$h' \cdot (B \cdot x + f(x, h)) - C \cdot h - g(x, h) = 0,$$

ein, für  $h = h(x) = ax^2 + bx^3 + \dots$ . Man erhält damit

$$(2ax + 3bx^2 + \dots)(\alpha x^2 - a^2 x^4 - 2abx^5 - \dots) + ax^2 + bx^3 + \dots - x^2 - x(ax^2 + bx^3 + \dots) = 0.$$

Der  $x^2$ -Koeffizient ist  $a - 1 = 0$ . Daher ist  $a = 1$  und  $h = h(x) = x^2 + O(x^3)$ .

Zurücksetzen in die Gleichung von  $x$  führt zu

$$\dot{x} = \alpha x^2 - x^4 + O(x^5).$$

Falls  $\alpha \neq 0$  lässt sich die Dynamik auf  $W^c$  von

$$\dot{x} = \alpha x^2 + O(x^4)$$

beschreiben (vgl. Abb. 11). Falls  $\alpha = 0$  lässt sich die Dynamik auf  $W^c$  von

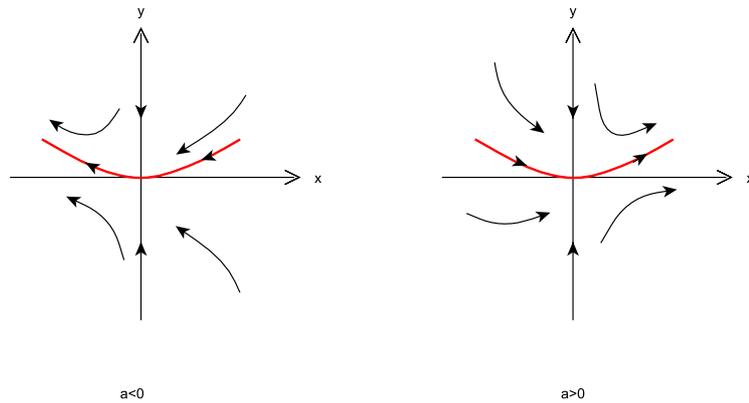


Abbildung 11: Phaseportrait für Aufgabe 6.3(ii) falls  $\alpha < 0$  (links) oder  $\alpha > 0$  (rechts).

$$\dot{x} = -x^4 + O(x^5)$$

beschreiben (vgl. Abb. 12).

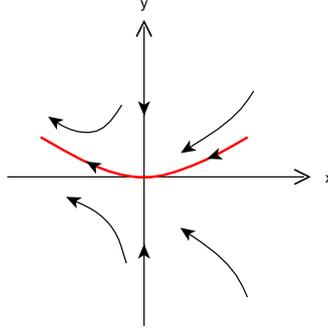
Ist  $\alpha = 0$  ein Bifurkationswert von  $\alpha$  (wenn wir  $\alpha$  als Bifunktionsparameter betrachten)? Wenn ja, was für ein Typ?

**Lösung der Aufgabe 6.3 (iii)** Das System lässt sich umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -x^2 - y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  hat Eigenwerte  $\pm i$  und  $-1$  mit Eigenräumen

$$E^c = E(\pm i) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E^s = E(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$



a=0

Abbildung 12: Phaseportrait für Aufgabe 6.3(ii) falls  $\alpha = 0$ .

wobei  $E^c \simeq \mathbb{C}^2 = \langle \omega \rangle \times \langle \bar{\omega} \rangle$  mit  $\omega = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist, und  $E^c$  ist eine

Komplexifikation von  $E := \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ . Die Zentrumsmannigfaltigkeit

$W^c$  ist dann gegeben von

$$W^c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(x, y)\}, \quad \text{für } h : E \rightarrow E^s,$$

wobei  $h = h(x, y)$  eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} h_x & h_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y + xh \\ x + yh \end{pmatrix} + h + (x^2 + y^2) - h^2 = 0$$

ist. Es sei  $h(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + \dots$ , dann ist

$$(2ax + cy + \dots)(-y + ax^3 + bxy^2 + cx^2y + \dots) + (2by + cx + \dots)(x + ax^2y + by^3 + cxy^2) + ax^2 + by^2 + cxy + \dots + x^2 + y^2 - (a^2x^4 + b^2y^4 + c^2x^2y^2 + 2abx^2y^2 + \dots) = 0$$

Der  $x^2$ - bzw.  $y^2$ - bzw.  $xy$ -Koeffizient ist  $c + a + 1 = 0$  bzw.  $-c + b + 1 = 0$  bzw.  $-2a + 2b + c = 0$ . Daraus folgt  $a = -1$ ,  $b = -1$  und  $c = 0$  und

$$h(x, y) = -x^2 - y^2 + O(|(x, y)|^3)$$

Die Dynamik auf  $W^c$  ist beschrieben von

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xh = -y + x(-x^2 - y^2) + O(|(x, y)|^4) \\ \dot{y} = x + yh = x + y(-x^2 - y^2) + O(|(x, y)|^4) \end{cases}$$

Wende die Polarkoordinaten  $r^2 = x^2 + y^2$ :

$$2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2r^2(x^2 + y^2) = -2r^4,$$

damit ist  $\dot{r} = -r^3$ . Die gesamte Dynamik ist wie in Abb. 13 gezeichnet.

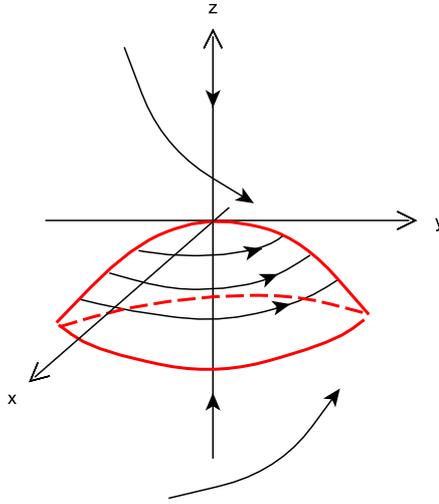


Abbildung 13: Phaseportrait für Aufgabe 6.3(iii).

**Aufgabe A** Es sei  $H_k$  der reelle Vektorraum aller homogenen Polynome des Grades  $k$  in  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Für

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

bestimmen Sie den linearen Operator  $ad L : H_k \rightarrow H_k$  für  $k = 2, 3$ .

**Lösung der Aufgabe A** Sei  $k = 2$ . Dann ist  $H_2$  erzeugt von  $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $xy \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $y^2 \frac{\partial}{\partial x}$  und  $x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $xy \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ . Nach der Definition von  $adL$  gilt

$$\begin{aligned} adL\left(x^2 \frac{\partial}{\partial x}\right) &= adL \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} = 2xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} adL\left(xy \frac{\partial}{\partial x}\right) &= adL \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix} = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

u.s.w. Als Matrix ist  $\overline{adL}$  der Form

$$\overline{adL} = \begin{array}{cccc|ccc} & x^2 \frac{\partial}{\partial x} & xy \frac{\partial}{\partial x} & y^2 \frac{\partial}{\partial x} & x^2 \frac{\partial}{\partial y} & xy \frac{\partial}{\partial y} & y^2 \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ xy \frac{\partial}{\partial x} & 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ y^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline x^2 \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ xy \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ y^2 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array},$$

und sie ist invertierbar.

Sei  $k = 3$ . Dann ist  $H_3$  erzeugt von  $x^3 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $x^2 y \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $xy^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $y^3 \frac{\partial}{\partial x}$  und  $x^3 \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $x^2 y \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $xy^2 \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $y^3 \frac{\partial}{\partial y}$ . Im Analog gilt

$$\overline{adL} = \begin{array}{cccc|cccc} & x^3 \frac{\partial}{\partial x} & x^2 y \frac{\partial}{\partial x} & xy^2 \frac{\partial}{\partial x} & y^3 \frac{\partial}{\partial x} & x^3 \frac{\partial}{\partial y} & x^2 y \frac{\partial}{\partial y} & xy^2 \frac{\partial}{\partial y} & y^3 \frac{\partial}{\partial y} \\ x^3 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 y \frac{\partial}{\partial x} & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ xy^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ y^3 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline x^3 \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ x^2 y \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ xy^2 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ y^3 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array},$$

und diese Matrix ist nicht invertierbar. In der Tat, das Bild  $\overline{adL}(H_3)$  hat ein 2-dimensionales Komplement in  $H_3$ .

**Aufgabe B** (Normalform für Hopf-Bifurkation) Es sei  $r \geq 3$ . Betrachte ein parametrisiertes  $C^r$ -System

$$\dot{w} = f(w, \mu), \quad w \in \mathbb{R}^2,$$

vom Parameter  $\mu \in \mathbb{R}$ . Es sei  $f(0, \mu) = 0$  für alle  $\mu$  in einer Umgebung von  $\mu_0 = 0$  und

$$D_w f(0, \mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} := A.$$

Zeigen Sie, dass das System durch Koordinatentransformation in

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + a\mu x - b\mu y + a'\mu^2 x - b'\mu^2 y + (cx - dy)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \omega x + a\mu y + b\mu x + a'\mu^2 y + b'\mu^2 x + (dx + cy)(x^2 + y^2) \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

verwandeln kann, für konstante Koeffizienten  $a, b, a', b', c, d \in \mathbb{R}$ .

**Lösung der Aufgabe B** Es sei

$$L = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$  und  $L_1 = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  Es sei  $H_2$  erzeugt von  $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $xy \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $y^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\mu^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $x\mu \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $y\mu \frac{\partial}{\partial x}$  und  $x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ , ...,  $y\mu \frac{\partial}{\partial y}$ . Da  $Y \in H_2$  der Form  $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist, gilt

$$adL(Y) = \begin{pmatrix} adL_1(Y_1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $adL_1$  auf  $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $xy \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $y^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $xy \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $y^2 \frac{\partial}{\partial y}$  angewendet gegeben von Aufgabe A ist (mit einer Multiplikation von  $\omega$ ). Rechne den Rest von  $adL_1$ :

$$adL_1(\mu^2 \frac{\partial}{\partial x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = \omega \mu^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(x\mu \frac{\partial}{\partial x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\mu \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = \omega \mu y \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu x \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(y\mu \frac{\partial}{\partial x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\mu \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu x \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(\mu^2 \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$adL_1(x\mu \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu x \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(y\mu \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu y \frac{\partial}{\partial x} - \omega \mu x \frac{\partial}{\partial y}$$

Damit ist

$$adL_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|cccccc} & x^2 & xy & y^2 & \mu^2 & x\mu & y\mu & x^2 & xy & y^2 & \mu^2 & x\mu & y\mu \\ x^2 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ xy & 2\omega & 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^2 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 \\ \mu^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 \\ x\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ y\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc|cccccc} x^2 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ xy & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 \\ y^2 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^2 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega \\ y\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{array} \end{array},$$

und  $\text{rang}(adL) = \text{rang}(adL_1) = 10$ . Betrachte

$$G_2 = \left\{ a\left(\mu x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y}\right) + b\left(-\mu y \frac{\partial}{\partial x} + \mu x \frac{\partial}{\partial y}\right) : a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

d.h.  $G_2$  ist von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Man prüft  $\text{rang}(adL, v_1, v_2) = 12$ .

Analog gilt für  $k = 3$ . In diesem Fall ist  $H_3$  20-dimensional erzeugt von  $x^3 \frac{\partial}{\partial x}, x^2 y \frac{\partial}{\partial x}, xy^2 \frac{\partial}{\partial x}, y^3 \frac{\partial}{\partial x}, \mu^3 \frac{\partial}{\partial x}, \mu^2 x \frac{\partial}{\partial x}, \mu^2 y \frac{\partial}{\partial x}, \mu x^2 \frac{\partial}{\partial x}, \mu y^2 \frac{\partial}{\partial x}, \mu xy \frac{\partial}{\partial x}$  und  $x^3 \frac{\partial}{\partial y}, \dots, \mu xy \frac{\partial}{\partial y}$ . Die Terme, die mit  $\mu$  nicht zu tun haben, sind von Aufgabe A bereit bestimmt. Weiteres Rechnen:

$$adL_1\left(\mu^3 \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = \omega \mu^3 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1\left(\mu^2 x \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^2 x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = \omega \mu^2 y \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu^2 x \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1\left(\mu^2 y \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^2 y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mu^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu^2 x \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu^2 y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1\left(\mu x^2 \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\mu x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = 2\omega \mu xy \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1\left(\mu y^2 \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2\mu y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -2\omega \mu xy \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu y^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1\left(\mu xy \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu y & \mu x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu y^2 \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu xy \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(\mu^3 \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu^3 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$adL_1(\mu^2 x \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2 x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu^2 x \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu^2 y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(\mu^2 y \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu^2 y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu^2 y \frac{\partial}{\partial x} - \omega \mu^2 x \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(\mu x^2 \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\mu x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2\omega \mu x y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(\mu y^2 \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mu y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu y^2 \frac{\partial}{\partial x} - 2\omega \mu x y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$adL_1(\mu x y \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mu x y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu y & \mu x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = -\omega \mu x y \frac{\partial}{\partial x} + \omega \mu y^2 \frac{\partial}{\partial y} - \omega \mu x^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

Damit ist

$$adL_1 = \left( \begin{array}{c|c} M_{10} & -\text{Id}_{10} \\ \hline \text{Id}_{10} & M_{10} \end{array} \right),$$

wobei

$$M_{10} = \begin{matrix} & x^3 & x^2 y & x y^2 & y^3 & \mu^3 & x \mu^2 & y \mu^2 & \mu x^2 & \mu y^2 & \mu x y \\ \begin{matrix} x^3 \\ x^2 y \\ x y^2 \\ y^3 \\ \mu^3 \\ \mu^2 x \\ \mu^2 y \\ x^2 \mu \\ y^2 \mu \\ x y \mu \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega & 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -3\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{matrix} \end{matrix},$$

und  $\text{rang}(adL) = \text{rang}(adL_1) = 16$ . Betrachte

$$G_3 = \{a'(\mu^2 x \frac{\partial}{\partial x} + \mu^2 y \frac{\partial}{\partial y}) + b'(-\mu^2 y \frac{\partial}{\partial x} + \mu^2 x \frac{\partial}{\partial y}) + c(x^3 \frac{\partial}{\partial x} + x y^2 \frac{\partial}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial}{\partial y} + y^3 \frac{\partial}{\partial y}) \\ + d(-x^2 y \frac{\partial}{\partial x} - y^3 \frac{\partial}{\partial x} + x^3 \frac{\partial}{\partial y} + x y^2 \frac{\partial}{\partial y}) : a', b', c, d \in \mathbb{R}\},$$

