

**Übungen zu
Dynamische Systeme
Blatt 7**

Aufgabe 7.1 (30 Punkte) Betrachte die (quadratische) Duffing-Gleichung

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \beta u - u^2 - \delta v \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

für $\delta > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ ist ein Parameter in der Nähe von $\beta_o = 0$.

- (i) Zeigen Sie für $\beta = \beta_o$ ist $(0, 0)$ ein Fixpunkt mit einer 1-dimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit W^c .
- (ii) Bestimmen Sie approximativ W^c und die Stabilität von $(0, 0)$ auf W^c .
- (iii) Ist β_o ein Bifurkationswert für (1)? Wenn ja, zeichnen Sie das Bifurkationsdiagramm.

Aufgabe 7.2 (30 Punkte) Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -y + \alpha x^2 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

- (i) Zeigen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $(0, 0)$ ein Fixpunkt mit einer 1-dimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit W_α^c , die abhängig von α ist.
- (ii) Bestimmen Sie approximativ W_α^c und die Stabilität von $(0, 0)$ auf W_α^c .
- (iii) Zeichnen Sie die gesamte Dynamik in \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 7.3 (20 Punkte) Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = y + o(|x|, |y|), \\ \dot{y} = o(|x|, |y|), \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie das System lässt sich transformieren in

$$\begin{cases} \dot{u} = v + au^2 \\ \dot{v} = bu^2 \end{cases} + o(|u|^2, |v|^2), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

oder in

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = au^2 + bvw \end{cases} + o(|u|^2, |v|^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$