Ph.D. Haibo Ruan WS 2013/14

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 6

Aufgabe 6.1 (20 Punkte) In der Menge $M_{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen, bestimmen Sie explizit Teilmengen von Matrizen A s.d.

(i) A die jordansche Normalform $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat;

(ii) A die jordansche Normalform $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat.

Zeigen Sie, dass jede Teilmenge eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist und Bestimmen Sie ihre Codimensionen.
(*Hinweis:* man stelle zuerst A als Nullstellen einer Funktion von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^m$ für gewisse Ganzzahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq 4$, dann wende den Satz der impliziten Funktionen.)

Aufgabe 6.2 (10 Punkte) Betrachte

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

um $(0,0)$. Zeigen Sie $W^c = \{(x, y(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ mit

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2x^2}}\big(C + \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2x^2}) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n \cdot n \cdot n! \cdot x^{2n}}\big)$$

ist für jedes $C \in \mathbb{R}$ eine Zentrumsmannigfaltigkeit fürs System um $(0,0)$, die um $(0,0)$ nicht analytisch ist.
Hinweis: Variation der Konstanten für $\frac{dy}{dx} = \frac{-y+x^2}{-x^3}$.

Aufgabe 6.3 (60 Punkte) Finden Sie eine geeignete Approximation der Zentrumsmannigfaltigkeit um 0 und zeichnen Sie damit das Phasenportrait um 0, für

(i) $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -y + \alpha x \end{cases}$, wobei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(ii) $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 + xy \end{cases}$, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(iii) $\begin{cases} \dot{x} = -y + xz \\ \dot{y} = x + yz \\ \dot{z} = -z - (x^2 + y^2) + z^2 \end{cases}$, wobei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist.

(*Hinweis: für (i) und (ii) hängt die Approximation und das Phasenportrait von α ab ($\alpha > 0$, $\alpha < 0$ oder $\alpha = 0$).*)

Abgabe: 13.01.2014