Ph.D. Haibo Ruan WS 2013/14

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 5

Aufgabe 5.1 (10 Punkte) Es sei $f : \Lambda \to \Lambda$ die Hufeisen-Abbildung. Mithilfe der symbolischen Dynamik zeigen Sie es gibt $x \in \Lambda$ sodass der Orbit $O(x)$ von x eine dichte Menge in Λ ist.
Hinweis: die Menge aller periodischen Punkte ist dicht in Λ.

Aufgabe 5.2 (20 Punkte) Betrachte das System

$$\begin{cases} \dot{r} = -\mu^2 r - r^3 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

in Polarkoordinaten für $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie damit, dass die Existenz eines rein imaginärischen kritischen Eigenwertes im Allgemein fürs Ereignis der Bifurkation der periodischen Orbits nicht ausreichend ist.

Aufgabe 5.3 (40 Punkte) (Nichteindeutigkeit der Zentrumsmannigfaltigkeit) Betrachte das System

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(i) $0 = (0, 0)$ ist ein Fixpunkt und der Zentrumseigenraum E_0^c ist die x-Achse.

(ii) Die Lösung für Anfangswert (x_o, y_o) befinden sich auf dem Graph der Funktion $y(x) = (y_o e^{-\frac{1}{x_o}})e^{\frac{1}{x}}$ in $\mathbb{R}^2$.
(*Hinweis: man löse die zwei Gleichungen unabhängig von ein anderen und eliminiere das Variabel t von $x = x(t)$ und $y = y(t)$.*)

(iii) Welche Graphen aus (ii) tendieren zu 0 und sind tangential zu E_0^c um 0?
(*Hinweis: die zwei Fälle $x < 0$ und $x \geq 0$ getrennt betrachten.)*

(iv) Wie viele Zentrumsmannigfaltigkeiten besitzen das System um 0? Zeichnen Sie sie.

Aufgabe 5.4 (20 Punkte) Zeigen Sie:

(i) ist $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein C^r-Atlas von einer topologischen Mannigfaltigkeit M, so ist die C^r-differenzierbare Struktur von M, die mit $\mathcal{A}$ verträglich ist, eindeutig gegeben von

$$\mathcal{B} = \{(U, \varphi) \,:\, \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \,\text{und}\, \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \,\text{sind}\, C^r,\, \forall\, (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}\}$$

(ii) sind $\mathcal{A}_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ zwei Atlasse von M und ist jede Karte von $\mathcal{A}_1$ verträglich mit jeder Karte von $\mathcal{A}_2$, so definieren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ eine gleiche differenzierbare Struktur von M.

Aufgabe 5.5 (10 Punkte) Zeigen Sie der Einheitskreis S^1 ist eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

Abgabe: 16.12.2013