Übungen zu
Dynamische Systeme

Blatt 4

Aufgabe 4.1 (20 Punkte) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ einen Fluss auf dem Torus $T^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induziert. Man bestimme für jedes σ die α- und ω-Limesmengen für alle Orbits.

Aufgabe 4.2 (30 Punkte) Erfgänzen Sie den Beweis vom Satz von Poincaré über die Stabilität der periodischen Orbits. Zu zeigen sind:

(i) Ist γ stabil, so ist

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, s.d. \, |P^n(x) - x_o| < \varepsilon \text{ für alle } x \in S \text{ mit } |x - x_o| < \delta.$$

(ii) Ist γ asymptotisch stabil, so ist γ stabil und

$$\exists \, \text{Umg.} \, U \text{ von } x_o \text{ in } S \quad s.d. \quad P^n(x) \to x_o \quad \text{als} \quad n \to \infty \quad \text{für alle } x \in U.$$

(iii) Ist γ instabil, so existiert ein $x \in S$ mit $P^{-n}(x) \to x_o$ als $n \to \infty$.

Aufgabe 4.3 (20 Punkte) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine C^2-Abbildung auf dem Einheitsintervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Betrachte das diskrete System erzeugt von $x \mapsto f(x)$ und die Stabilität von Fixpunkten $\bar{x} = 0$ und $\bar{x} = 1$. Zeigen Sie:

(i) ist $f''(x) > 0$ für all $x \in [0,1]$, so ist 0 ein stabiler Fixpunkt und 1 ein instabiler Fixpunkt;

(ii) ist $f''(x) < 0$ für all $x \in [0,1]$, so ist 1 ein stabiler Fixpunkt und 0 ein instabiler Fixpunkt.

Hinweis: ein bild sagt mehr als tausend worte.

Aufgabe 4.4 (30 Punkte) Betrachte das 2D-System in Polarkoordinaten (r, θ)

$$\begin{cases} \dot{r} = ar(1-r) \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

und den periodischen Orbit $\gamma = \{(r, \theta) : r = 1, \, \theta \in \mathbb{R}\}$.

(i) Definieren Sie einen linearen Schnitt S für γ um $x_o = (1,0)$, der senkrecht zu γ ist.

(ii) Definieren Sie die Poincaré-Abbildung $P : S \to S$ auf S.
Hinweis: $r(t) = \frac{r_o}{r_o + (1-r_o)e^{-at}}$ *gibt die Lösung für Anfangswert* $r(0) = r_o$ *an. Man begründe die erste Rückkehrzeit ist* 2π.

(iii) Bestimmen Sie durch die Poincaré-Abbildung P die Stabilität von γ.
Hinweis: Aufgabe 4.3.

Aufgabe 4.5 (20 Punkte) Betrachte $\dot{x} = -(\mu^2 x + x^3)$ für $\mu, x \in \mathbb{R}$ um $\mu_o = 0$. Ist μ_o ein Bifurkationswert von μ im Sinn von Definition (a) und/oder von Definition (b)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: 02.12.2013