Ph.D. Haibo Ruan WS 2013/14

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (10 Punkte) Stören Sie die Lotka-Volterra-Gleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases}$$

mit einer ε-Störung sodass das neue System eine einzige Ruhelage P in $\mathrm{int}(\mathbb{R}_+^2)$ besitzt, die alle Orbits die in $\mathrm{int}(\mathbb{R}_+^2)$ anfangen abstößt, d.h. $\alpha(x) = \{P\}$ für alle $x \in \mathrm{int}(\mathbb{R}_+^2)$.

Aufgabe 3.2 (30 Punkte) Es sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ eine hyperbolische Ruhelage vom dynamischen System $\dot{x} = f(x)$, wobei $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\bar{x}$ ist. Es seien $\varepsilon > 0$ und $g : U \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion. Betrachte

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x) := F_\varepsilon(x). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(i) für ausreichend kleines ε besitzt F_ε einen eindeutigen Fixpunkt $\hat{x}$ in einer Umgebung von $\bar{x}$. (*Hinweis: Satz von der impliziten Funktion.*)

(ii) für geeignetes ε ist $\hat{x}$ hyperbolisch mit

$$\dim E^s(A) = \dim E^s(B), \quad \dim E^u(A) = \dim E^u(B), \tag{2}$$

wobei $A = Df(\bar{x})$, $B = DF_\varepsilon(\hat{x})$, E^s bzw. E^u Eigenräume von Eigenwerten mit negativen bzw. positiven Reellteilen bezeichnen. (*Hinweis: die Eigenwertefunktion* $EW : M_{n\times n} \to \mathbb{C}^n$ *mit* $EW(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ *ist eine stetige Funktion, die stetig von Komponenten von Matrix* M *abhängt. Betrachte* $C = DF(\bar{x})$*. Dann sind* A, C *bzw.* B, C *ausreichend nah für geeignetes* ε*.*)

(iii) die Flüsse erzeugt von $\dot{x} = f(x)$ und von (1) sind topologisch konjugiert. (*Hinweis: Satz von Hartman-Grobman und die Tatsache: zwei Flüsse* $\phi(x,t) = e^{tA}x$ *und* $\psi(x,t) = e^{tB}x$ *mit hyperbolischen Matrizen* A, B *(d.h.* $\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \emptyset$*) sind genau dann topologisch konjugiert wenn (2) gilt.*)

Aufgabe 3.3 (20 Punkte) Betrachten Sie die Konkurrenz-Gleichung

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - cy) \\ \dot{y} = y(d - ex - fy) \end{cases} \qquad \text{für } a, b, c, d, e, f > 0. \tag{3}$$

Zeigen Sie:

(i) im Fall $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ folgt jeder Orbit in $\mathrm{int}(\mathbb{R}^2_+)$ eine Niveau-Linie von $V(x, y) = xy^{-k}$ mit $k = \frac{a}{d}$, d.h. $\frac{d}{dt} V\big(x(t), y(t)\big) \equiv 0$.

(ii) $Q(x, y) = be(x - \bar{x})^2 + 2ce(x - \bar{x})(y - \bar{y}) + cf(y - \bar{y})^2$ ist eine Lyapunov-Funktion für (3), wobei $(\bar{x}, \bar{y})$ eine Ruhelage von (3) ist.

Aufgabe 3.4 (10 Punkte) Beweisen Sie jeder Orbit eines 2-dimensionalen Konkurrenz-Systems konvergiert entweder gegen eine Ruhelage oder gegen ∞.

Abgabe: 18.11.2013