Ph.D. Haibo Ruan WS 2013/14

Übungen zu Dynamische Systeme
Blatt 1

Aufgabe 1 (20 Punkte) Ergänzen Sie die Stabilitätsanalysis des Fixpunktes $p = \frac{R-1}{R}$ für die Abbildung $F : (0,1) \to (0,1)$ mit $F(x) = Rx(1-x)$, indem Sie zeigen:

(a) für $1 < R \leq 2$ konvergieren alle Orbits in $(0,1)$ gegen p *letztendlich monoton*, d.h. $\forall\, x \in (0,1)\, \exists\, N > 0$ s.d. $x_n < x_{n+1} < p$ für alle $n > N$ und $x_n \to p$ als $n \to \infty$ gilt;

(b) für $2 < R < 3$ konvergieren alle Orbits in $(0,1)$ gegen p *letztendlich abwechselnd*, d.h. $\forall\, x \in (0,1)\, \exists\, N > 0$ s.d. $(x_n - p)$ und $(x_{n+1} - p)$ umgekehrte Vorzeichen besitzen für alle $n > N$ und $x_n \to p$ als $n \to \infty$ gilt.

Aufgabe 2 Betrachten Sie die *Bernoulli-Abbildung* (oder Dopplung-Abbildung) $D : [0,1) \to [0,1)$ mit $D(x) = 2x \pmod 1$, oder äquivalent

$$D(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} .$$

(a) (10 Punkte) Beschreiben Sie den Orbit von

- (a1) $x_0 = 0.3$;
- (a2) $x_0 = 0.7$;
- (a3) $x_0 = \frac{1}{8}$;
- (a4) $x_0 = \frac{1}{7}$;
- (a5) $x_0 = \frac{3}{11}$.

(b) (10 Punkte) Erklären Sie warum das Bestimmen des Orbits von $\frac{1}{7}$ einem Computer Schwierigkeit bereitet würde wenn man mit Dezimalbruchentwicklung anfängt.

(c) (10 Punkte) Bestimmen Sie die explizite Formel von $D^2(x)$ und zeichnen Sie den Graph von $D^n(x)$ für $n = 1, 2, 3$.

(d) (10 Punkte) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von $D^n(x)$ für $n = 1, 2, 3$. Wie viele Fixpunkte besitzt $D^n(x)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 3 (20 Punkte)

(a) Begründen Sie, dass das durch Bernoulli-Abbildung erzeugte dynamische System chaotisch ist (*Hinweis: änhlich gezeigt als für* $F(x) = 4x(1 - x)$).

(b) Entwerfen Sie ein weiteres chaotisches System mit dem gleichen Prinzip.

Abgabe: 28.10.2013