Dr. Haibo Ruan WS 2012/13

Übungen zu
Dynamische Systeme
Blatt 8

Aufgabe 8.1 (40 Punkte) (Nichteindeutigkeit der Zentrumsmannigfaltigkeit)
Betrachte das System

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(i) $0 = (0, 0)$ ist ein Fixpunkt und der Zentrumseigenraum E_0^c ist die x-Achse.

(ii) Die Lösung für Anfangswert (x_o, y_o) befinden sich auf dem Graph der Funktion $y(x) = (y_o e^{-\frac{1}{x_o}})e^{\frac{1}{x}}$ in $\mathbb{R}^2$.
(*Hinweis: man löse die zwei Gleichungen unabhängig von ein anderen und eliminiere das Variabel t von $x = x(t)$ und $y = y(t)$.*)

(iii) Welche Graphen aus (ii) tendieren zu 0 und sind tangential zu E_0^c um 0?
(*Hinweis: die zwei Fälle $x < 0$ und $x \geq 0$ getrennt betrachten.)*

(iv) Wie viele Zentrumsmannigfaltigkeiten besitzen das System um 0? Zeichnen Sie sie.

Aufgabe 8.2 (60 Punkte) Finden Sie eine geeignete Approximation der Zentrumsmannigfaltigkeit um 0 und zeichnen Sie damit das Phasenportrait um 0, für

(i) $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -y + \alpha x \end{cases}$, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(ii) $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 + xy \end{cases}$, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(iii) $\begin{cases} \dot{x} = -y + xz \\ \dot{y} = x + yz \\ \dot{z} = -z - (x^2 + y^2) + z^2 \end{cases}$, wobei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist.

(*Hinweis: für (i) und (ii) hängt die Approximation und das Phasenportrait von α ab ($\alpha > 0$, $\alpha < 0$ oder $\alpha = 0$).)*

Abgabe: 7.1.2013