Dr. Haibo Ruan WS 2012/13

Übungen zu Dynamische Systeme

Blatt 6

Aufgabe 6.1 (30 Punkte) Sei $z = x + iy$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und betrachte Vektorfelder

$$\dot{z} = z^k \tag{1}$$

und

$$\dot{z} = \bar{z}^k, \tag{2}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}_+$ und $\bar{z}$ die komplexe Konjugation von z bezeichnet. Zeigen Sie dass die Vektorfelder den einzigen Fixpunkt in $z = 0 = (0, 0)$ haben und der Fixpunkt für (1) bzw. (2) hat Index k bzw. $-k$. Zeichnen Sie die Vektorfelder um 0 für $k = 3$.

Hinweis: wende Polarkoordinaten $z = re^{i\theta}$ an und betrachte die Vektorfelder auf dem Einheitskreis $C = S^1$ und benutze die geometrische Definition vom Index.

Aufgabe 6.2 (20 Punkte) Es sei C eine einfache abgeschlossene glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$, r, k seien nichtnegative Ganzzahlen mit $r \geq k \geq 0$. Definiere die Menge

$$C^r(\mathbb{R}^2; C) = \{f \in C^r(\mathbb{R}^2) \, : \, f^{-1}(0) \cap C = \emptyset\}$$

und betrachte den Index als eine Funktion

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_C(\cdot) : C^r(\mathbb{R}^2; C) &\to \mathbb{Z} \\ f \quad &\mapsto \operatorname{ind}_C(f). \end{aligned}$$

Zeigen Sie die Indexfunktion ist stetig, d.h. ist $f \in C^r(\mathbb{R}^2; C)$ und $\varepsilon > 0$ ausreichend klein, so gilt

$$\operatorname{ind}_C(f) = \operatorname{ind}_C(g),$$

für alle C^k-Störung g der Größe ε von f. Zeigen Sie weiter der Index ist eine Homotopieinvarianz: seien f, g homotop in $C^r(\mathbb{R}^2; C)$ (d.h. es gibt eine stetige Abbildung $h : [0, 1] \times C^r(\mathbb{R}^2; C) \to C^r(\mathbb{R}^2; C)$ mit $h(0, \cdot) = f$ und $h(1, \cdot) = g$), dann ist

$$\operatorname{ind}_C(f) = \operatorname{ind}_C(g).$$

Hinweis: o.B.d.A. nehmen wir an $C = S^1$ (warum?). Ist $\operatorname{ind}_C(f) = k$, so ergibt sich $\tilde{f}(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ eine Abbildung von S^1 nach S^1. Mit Polarkoordinaten ist $\tilde{f}$ im

Grunde eine Abbildung von $[0, 2\pi]$ nach $[0, 2k\pi]$ mit $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(2\pi) = 2k\pi$. Eine Störung von f entspricht einer Störung von $\tilde{f}$ mit Endepunkte $(0, 0)$ und $(2\pi, 2k\pi)$ festzuhalten.)

Aufgabe 6.3 (20 Punkte) Geben Sie ein Vektorfeld f auf der 2-dimensionalen Sphäre S^2 sodass die nichtwandernde Menge aus 2 Punkten besteht und

(i) f Morse-Smale ist;

(ii) f nicht Morse-Smale ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: 10.12.2012